



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Zbiory (języki) regularne

Teoria automatów i języków formalnych

Dr inż. Janusz Majewski
Katedra Informatyki



Zbiory (języki) regularne

Niech Σ będzie alfabetem.

Zbiór (język) regularny nad alfabetem Σ definiujemy następująco:

- 1) \emptyset – zbiór pusty jest zbiorem regularnym,
- 2) $\{\epsilon\}$ – zbiór zawierający łańcuch pusty jest zbiorem regularnym,
- 3) $\{a\}$ – ($\forall a \in \Sigma$) zbiór zawierający łańcuch złożony z pojedynczego symbolu alfabetu jest zbiorem regularnym,
- 4) jeśli P i Q są zbiorami regularnymi nad Σ to zbiorami regularnymi są także:
 - a) $P \cup Q$ – suma teoriomnogościowa zbiorów P i Q ,
 - b) PQ – złożenie (konkatenacja) zbiorów P i Q ,
 - c) P^* – domknięcie Kleene'ego zbioru P .
- 5) nic innego poza tym, co wynika z punktów (1) – (4), nie jest zbiorem regularnym.



Wyrażenia regularne (1)

Wyrażenia regularne służą do uproszczonego oznaczania zbiorów regularnych. Niech Σ będzie alfabetem. Wyrażenia regularne nad alfabetem Σ definiujemy następująco:

- 1) \emptyset – jest wyrażeniem regularnym oznaczającym zbiór pusty \emptyset będący zbiorem regularnym,
- 2) ε – jest wyrażeniem regularnym oznaczającym zbiór zawierający łańcuch pusty $\{\varepsilon\}$ będący zbiorem regularnym,
- 3) a – ($\forall a \in \Sigma$) jest wyrażeniem regularnym oznaczającym zbiór zawierający łańcuch złożony z pojedynczego symbolu alfabetu będący zbiorem regularnym,
- 4) jeśli p i q są wyrażeniami regularnymi oznaczającymi odpowiednio zbiory regularne P i Q nad Σ to wyrażeniami regularnymi są także:
 - a) $p|q$ – wyrażenie regularne oznaczające $P \cup Q$ – sumę teoriomnogościową zbiorów P i Q będącą zbiorem regularnym,
 - b) pq – wyrażenie regularne oznaczające PQ – złożenie (konkatenację) zbiorów P i Q będące zbiorem regularnym,
 - c) p^* – wyrażenie regularne oznaczające P^* – domknięcie Kleene’ego zbioru P będące zbiorem regularnym.
- 5) nic innego poza tym, co wynika z punktów (1) – (4), nie jest wyrażeniem regularnym.



Przykłady

Przykład:

Niech $\Sigma = \{a, b\}$. Zbiorem regularnym nad Σ jest np. zbiór:

$$\{\varepsilon, a, ab, abb, abbb, abbbb, \dots\} = \{\varepsilon\} \cup \{a\}^n \{b\}^*$$

Ten zbiór regularny zapisujemy w formie wyrażenia regularnego jako:

$$\varepsilon|ab^*$$

Przykład:

Wyrażenie regularne:

$$(0|1)^*011$$

odpowiada zbiorowi regularnemu:

$$(\{0\} \cup \{1\})^* \{0\} \{1\} \{1\} = \{0, 1\}^* \{011\}$$

będącemu dowolnym ciągiem zer i jedynek zakończonym sekwencją: 011.



Wyrażenia regularne (2)

- Dwa wyrażenia **p** i **q** regularne są równe (równoważne), gdy odpowiadające im zbiory regularne *P* i *Q* są równe (identyczne).
- W zapisie wyrażen regularnych można stosować nawiasy.
- Zapisując wyrażenia regularne stosujemy następujące priorytety operatorów:
 - () - najwyższy,
 - *
 - · - (konkatenacja)
 - | - najniższy.



Tożsamości

Niech **p**, **q** i **r** będą dowolnymi wyrażeniami regularnymi. Prawdziwe są następujące zależności i tożsamości:

$$p|q = q|p$$

$$p|(q|r) = (p|q)|r$$

$$p(qr) = (pq)r$$

$$pq|pr = p(q|r)$$

$$pq|rq = (p|r)q$$

$$\varepsilon p = p\varepsilon = p$$

$$\emptyset p = p\emptyset = \emptyset$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon$$

$$\emptyset^* = \varepsilon$$

$$p^* = p|p^* = (p|\varepsilon)^*$$

$$(p^*)^* = p^{**} = p^*$$

$$p|p = p$$

$$p|\emptyset = p$$

$$\varepsilon|p^* = p^*$$

$$\varepsilon|pp^* = p^*$$

$$\varepsilon|p^*p = p^*$$

$$pq q^* | p q^* = p q^*$$

$$(p|q)^* = (p^*|q^*)^* = (p^*q^*)^*$$



Przykłady (1)

Przykład:

$$\mathbf{abb^*|ab^* = ab^*}$$

bo:

$$\mathbf{abb^*|ab^*} = \{ab\}\{b\}^* \cup \{a\}\{b\}^* = \{ab, abb, \dots\} \cup \{a, ab, abb, \dots\} = \{a, ab, abb, \dots\} = \{a\}\{b\}^*$$

Przykład:

$$\mathbf{(ab|a)^*a = a(ba|a)^*}$$

bo:

(ab|a)* - to łańcuchy zbudowane z liter a i b, rozpoczynające się literą a, w których żadne dwie litery b, o ile w ogóle występują, nie występują obok siebie,

(ba|a)* - to łańcuchy zbudowane z liter a i b, kończące się literą a, w których żadne dwie litery b, o ile w ogóle występują, nie występują obok siebie,

(ab|a)*a oraz **a(ba|a)*** - to łańcuchy zbudowane z liter a i b, rozpoczynające się i kończące się literą a, w których żadne dwie litery b, o ile w ogóle występują, nie występują obok siebie.



Przykłady (2)

Przykład:

$$\mathbf{(a|b)^* \neq a^*|b^*}$$

bo:

$$\mathbf{(a|b)^*} = \{a, b\}^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$$

$$\mathbf{a^*|b^*} = \{a\}^* \cup \{b\}^* = \{\epsilon, a, aa, aaa, \dots\} \cup \{\epsilon, b, bb, bbb, \dots\} = \{\epsilon, a, b, aa, bb, aaa, bbb, \dots\}$$

Przykład:

$$\mathbf{b(ab|b)^* \neq aa^*b(aa^*b)^*}$$

bo:

b(ab|b)* - to łańcuchy zbudowane z liter a i b, rozpoczynające się i kończące się literą b, w których żadne dwie litery a, nie występują obok siebie,

aa^*b(aa^*b)* - to łańcuchy zbudowane z liter a i b, rozpoczynające się literą a, kończące się literą b, w których żadne dwie litery b nie występują obok siebie.