AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

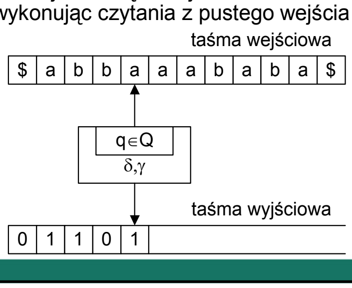
Automaty Moore'a i Mealy'ego; transducery

Teoria automatów i języków formalnych

Dr inż. Janusz Majewski
Katedra Informatyki

Wprowadzenie

Automaty Moore'a i Mealy'ego będziemy rozważać tylko w wersji deterministycznej i zupełnej. W definicjach tych automatów nie pojawia się pojęcie stanów końcowych, za to mamy taśmę wyjściową, na którą automat zapisuje symbole z alfabetu wyjściowego. Po przeczytaniu całego słowa analizowany jest ostatni symbol zapisany na taśmie wyjściowej. Jeżeli jest to symbol należący do pewnego podzbioru R alfabetu wyjściowego, uznajemy, że słowo zostało zaakceptowane. Jeśli ostatni zapisany na taśmie wyjściowej symbol nie należy do podzbioru R, to uważamy, że słowo nie zostało zaakceptowane. Automat Moore'a wpisuje symbole na taśmę wyjściową przy każdorazowym ustaleniu stanu (także pisze na wyjście w stanie początkowym), więc potrafi zaakceptować lub odrzucić słowo puste, gdyż przy pustym wejściu zapisywany jest jakiś symbol na taśmę wyjściową. Automat Mealy'ego robi zapisy na wyjściu tylko podczas kroku, tzn. podczas przejścia z jednego stanu do drugiego, co w automacie deterministycznym jest związane z przeczytaniem symbolu z wejścia, więc nie jest w stanie zaakceptować bądź odrzucić słowa pustego, ponieważ nie wykonując czytania z pustego wejścia nie ma możliwości zapisania czegokolwiek na wyjściu.



Automat zupełny i deterministyczny Moore'a

$A = <\Sigma, Q, \Delta, q_0, R, \delta, \gamma>$

Σ – alfabet terminalny (wejściowy)

Q – zbiór stanów

Δ – alfabet wyjściowy

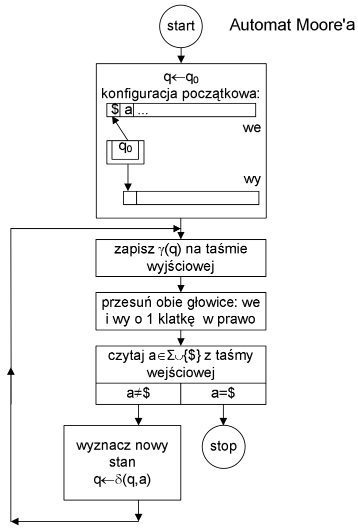
$q_0 \in Q$ – stan początkowy

$R \subseteq \Delta$ – podzbiór alfabetu wyjściowego

δ: $Q \times \Sigma \mapsto Q$– funkcja przejścia

γ: $Q \mapsto \Delta$ – funkcja wyjścia

δ i γ – określone dla wszystkich elementów swoich dziedzin



Przykład automatu Moore'a

$A_{Moore} = <\Sigma, Q, \Delta, q_0, R, \delta, \gamma>$

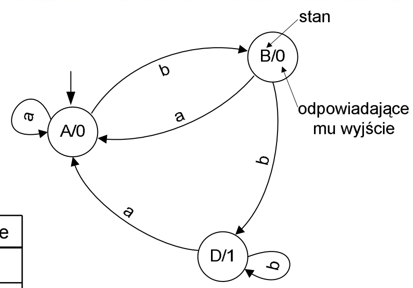
$\Sigma = \{a, b\}$

$Q = \{A, B, D\}$

$\Delta = \{0,1\}$

$q_0 = A$

$R = \{1\}$



δ:

Stan we	a	b
A	A	B
B	A	D
D	A	D

γ:

Stan	Wyjście
A	0
B	0
D	1

$$\begin{bmatrix} \$aababbb\$ \\ A \\ \varepsilon \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$aababbb\$ \\ A \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$aababbb\$ \\ A \\ 00 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$aababbb\$ \\ B \\ 000 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$aababbb\$ \\ A \\ 0000 \end{bmatrix}$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} \$aababbb\$ \\ B \\ 00000 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$aababbb\$ \\ D \\ 000000 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$aababbb\$ \\ D \\ 0000001 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$aababbb\$ \\ \cdot \\ 0000001\underline{1} \end{bmatrix}$$

Automat zupełny i deterministyczny Mealy'ego

$A = \langle \Sigma, Q, \Delta, q_0, R, \delta, \gamma \rangle$

Σ – alfabet terminalny (wejściowy)

Q – zbiór stanów

Δ – alfabet wyjściowy

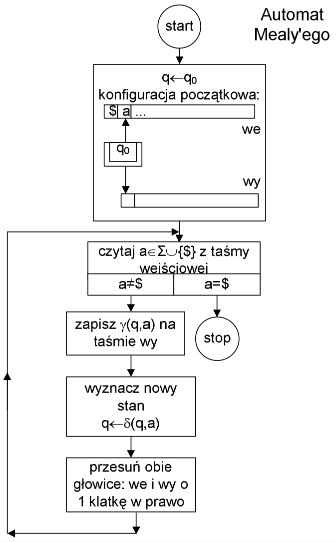
$R \subseteq \Delta$ – podzbiór alfabetu wyjściowego

$q_0 \in Q$ – stan początkowy

δ: $Q \times \Sigma \mapsto Q$ – funkcja przejścia

γ: $Q \times \Sigma \mapsto \Delta$ – funkcja wyjścia

δ i γ – określone dla wszystkich elementów swoich dziedzin

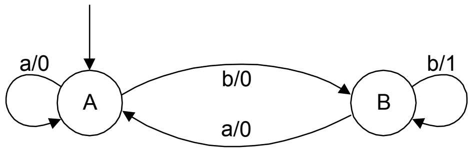


Automaty Moore'a i Mealy'ego

- Słowo wejściowe jest akceptowane przez automat Mealy'ego, gdy ostatni zapisany na taśmie wyjściowej symbol należy do R i słowo zostało przeczytane do końca. Automat Mealy'ego NIE akceptuje słowa pustego (nic wtedy nie pisze na taśmie wyjściowej).
- Dowodzi się, że automat Mealy'ego jest równoważny automatowi Moore'a (z wyjątkiem akceptacji słowa pustego).
- Dowodzi się dalej, że automat Moore'a jest równoważny deterministycznemu automatowi Rabina-Scotta.
- Wszystkie te automaty akceptują wyłącznie języki regularne. Wszystkie czytają słowo wejściowe do końca (są deterministyczne i zupełne). Decyzja o akceptacji zależy od ostatniego zapisanego na taśmie wyjściowej symbolu (aut. Moore'a i Mealy) lub od stanu, w którym automat zatrzyma się (aut. Rabina-Scotta).

Przykład automatu Mealy'ego

$A_{Mealy} = <\Sigma, Q, \Delta, q_0, R, \delta, \gamma>$
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{A, B\}$
$\Delta = \{0,1\}$
$q_0 = A$
$R = \{1\}$



δ:

Stan	a	b
A	A	B
B	A	B

γ:

Stan	a	b
A	0	0
B	0	1

$$\begin{bmatrix} \$\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b\ \$ \\ A \\ \varepsilon \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b\ \$ \\ A \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b\ \$ \\ A \\ 0\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b\ \$ \\ B \\ 0\ 0\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b\ \$ \\ B \\ 0\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} \$\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b\ \$ \\ A \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b\ \$ \\ B \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \$\ a\ a\ b\ b\ a\ b\ b\ \$ \\ B \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \underline{1} \end{bmatrix}$$

Przekształcenie $A_{Moore} \rightarrow A_{Mealy}$

We: $A_{Moore} = <\Sigma, Q, \Delta, q_0, R, \delta, \gamma>$

$\varepsilon \notin L(A_{Moore})$

Wy: $A_{Mealy} = <\Sigma, Q, \Delta, q_0, R, \delta, \gamma'>$

takie, że: $L(A_{Mealy}) = L(A_{Moore})$

Funkcje przejścia bez zmian.

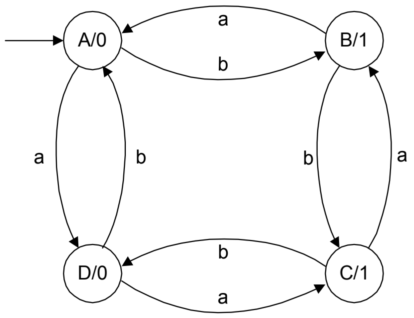
Funkcja wyjścia:

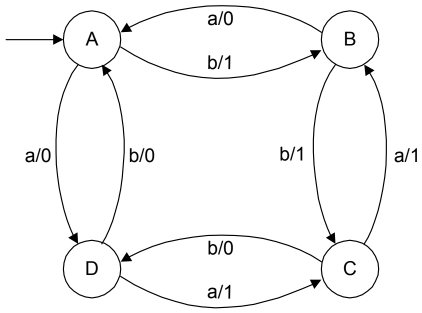
$(\forall \alpha \in \Sigma)\ (\forall q \in Q)\ (\gamma'(q,a) = \gamma(\delta(q,a)))$

Przekształcenie $A_{Moore} \rightarrow A_{Mealy}$

Przykład:

$\Sigma = \{a,b\}$, $Q = \{A, B, C, D\}$, $q_0 = A$, $\Delta = \{0, 1\}$, $R = \{1\}$





Przekształcenie $A_{Mealy} \rightarrow A_{Moore}$

We: $A_{Mealy} = <\Sigma, Q, \Delta, q_0, R, \delta, \gamma>$

Wy: $A_{Moore} = <\Sigma, Q', \Delta, q_0', R, \delta', \gamma'>$

takie, że: $L(A_{Moore}) = L(A_{Mealy})$

Numerujemy stany i symbole terminalne

$Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$

$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_{m.}\}$

Każdej parze $[q_i, a_j]$ przypisujemy nowy stan $S_{ij} \in Q'$

$S_{ij} = [q_i, a_j]$ $q_i \in Q$, $i = 0,\ldots,n$ $a_j \in \Sigma$, $j = 1,\ldots,m.$

Stanowi q_0 dodatkowo przypisujemy nowy stan $S_0 \in Q'$

Tworzymy nową funkcję przejść

$\delta'(S_{ij}, a_k) = [\delta(q_i, a_j), a_k]$

$\delta'(S_0, a_k) = [q_0, a_k] = S_{0k}$

Tworzymy nową funkcję wyjść

$\gamma'(S_{ij}) = \gamma(q_i, a_j)$

$\gamma'(S_0)$ – dowolne (nieokreślone)

Mamy: $Q' = \{S_{ij} \mid i = 0,\ldots,n;\ j = 1,\ldots,m\} \cup \{S_0\}$

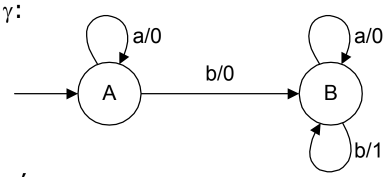
$q_0' = S_0$; δ' i γ' zdefiniowane jak wyżej

Przekształcenie $A_{Mealy} \to A_{Moore}$

Przykład:

$\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{A, B\}$, $\Delta = \{0, 1\}$, $q_0 = A$, $R = \{1\}$

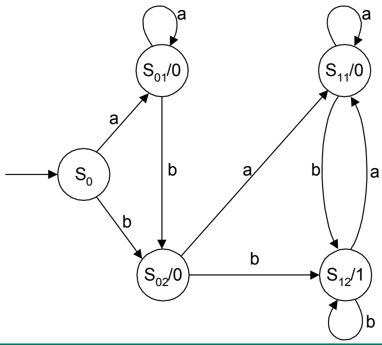
δ, γ:



	a (a_1)	b (a_2)
A/S_0	A/S_{01}	B/S_{02}
B	B/S_{11}	B/S_{12}

δ', γ':

Aktual. stan	Następny stan		Wyjście
	a	b	
S_0	S_{01}	S_{02}	dow.
S_{01}	S_{01}	S_{02}	0
S_{02}	S_{11}	S_{12}	0
S_{11}	S_{11}	S_{12}	0
S_{12}	S_{11}	S_{12}	1



Przekształcenia $A_{Moore} \leftrightarrow$ deterministyczny $A_{Rabina\text{-}Scotta}$

(i)

We: $A_{Moore} = <\Sigma, Q, \Delta, q_0, R, \delta, \gamma>$

Wy: $A_{Rabina\text{-}Scotta} = <\Sigma, Q, F, q_0, \delta>$ - deterministyczny

$L(A_{Moore}) = L(A_{Rabina\text{-}Scotta})$

$F := \{q \in Q : \gamma(q) \in R\};$

Σ, Q, q_0, δ - bez zmian

(ii)

We: $A_{Rabina\text{-}Scotta} = <\Sigma, Q, F, q_0, \delta>$ - deterministyczny

Wy: $A_{Moore} = <\Sigma, Q, \Delta, q_0, R, \delta, \gamma>$

$L(A_{Rabina\text{-}Scotta}) = L(A_{Moore})$

$\Delta := \{\omega_0, \omega_1\};$

for $q \in Q - F$ do $\gamma(q) := \omega_0;$

for $q \in F$ do $\gamma(q) := \omega_1;$

$R := \{\omega_1\};$

Σ, Q, q_0, δ - bez zmian

Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer

Uogólniona maszyna sekwencyjna (UMS) zwana także transducerem jest oparta o koncepcję Mealy'ego „zastosowaną" do automatu skończonego. Formalnie: $M = <\Sigma, Q, \Delta, q_0, F, \delta>$, gdzie:

Σ – alfabet terminalny (wejściowy)

Q – zbiór stanów

Δ – alfabet wyjściowy

$\mathbf{F \subseteq Q}$ – podzbiór zbioru stanów (stany akceptujące)

$q_0 \in Q$ – stan początkowy

$\delta: Q \times \Sigma \mapsto 2^{Q \times \Delta^*}$ – funkcja przejścia i wyjścia

Należenie (p,w) do $\delta(q, a)$ interpretujemy jako fakt , że jeśli M jest w stanie q i obserwuje symbol wejściowy a, to jedną z możliwych opcji jej ruchu jest przejście w stan p i wydrukowanie łańcucha w na taśmie wyjściowej.

Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer

Dziedzinę funkcji δ rozszerzamy do $Q \times T^*$ w następujący sposób :

(1) $\delta(q, \varepsilon) = \{(q, \varepsilon)\}$;

(2) Dla dowolnego $x \in T^*$ i dowolnego $a \in T$ definiujemy:

$$\delta(q, xa) = \{(p, w) \mid (\exists p' \in Q)\, (\exists w_1, w_2 \in \Delta^*) \; ((p', w_1) \in \delta(q, x) \wedge (p, w_2) \in \delta(p', a) \wedge w = w_1 w_2)\}$$

Zdefiniujemy teraz:

$M(x) = \{y \mid (p, y) \in \delta(q_0, x)$ dla pewnego $p \in F\}$,
gdzie M jest UMS określoną wcześniej.

Dla **dowolnego** języka $L \subseteq T$ zdefiniujemy:

$M(L) = \{y \mid (\exists x \in L)\, (y \in M(x))\}$

Mówimy, że $M(L)$ jest *odwzorowaniem UMS* , tzn. odwzorowaniem, które każdemu językowi L przyporządkowuje język $M(L)$, określony jak wyżej.

Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer

Zdefiniujmy dalej:

$M^{-1}(y) = \{x \mid y \in M(x)\}$

oraz

$M^{-1}(L) = \{x \mid (\exists y \in L)\ (y \in M(x))\}$

Mówimy, że M^{-1} jest *odwrotnym odwzorowaniem UMS*. Ponieważ (podobnie jak w przypadku homomorfizmów) nie musi być prawdą , że $M^{-1}(M(L))=M(M^{-1}(L))=L$, to M^{-1} nie jest prawdziwą odwrotnością odwzorowania $L \mapsto M(L)$.

Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer

Przykład:

Niech $M = <\{q_0,q_1\}, \{0,1\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1\}>$

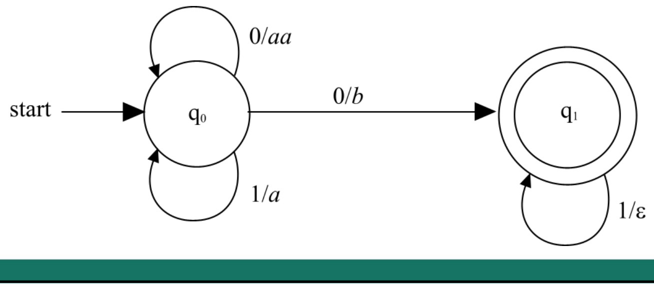
Funkcję δ definiujemy za pomocą następujących reguł:

$\delta(q_0, 0) = \{(q_0, aa), (q_1, b)\},$

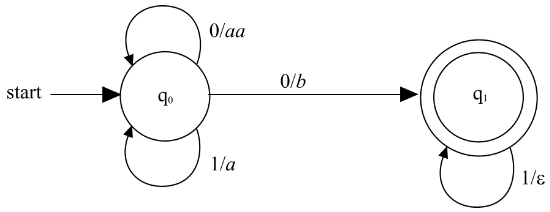
$\delta(q_0, 1) = \{(q_0, a)\},$

$\delta(q_1, 0) = \varnothing,$

$\delta(q_1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$



Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer



Niech $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$
Wtedy $M(L) = \{a^{2n-2}b \mid n \geq 1\} = \{a^{2n}b \mid n \geq 0\}$

Jeżeli $L_1 = \{a^{2n}b \mid n \geq 0\}$,
to $M^{-1}(L_1) = \{w01^n \mid n \geq 0, w \in \{0,1\}^*$ oraz
liczba jedynek w słowie w jest parzysta$\}$.

Zauważymy, że $M^{-1}(M(L)) \supseteq L$

Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer

Twierdzenie: Klasa języków regularnych jest zamknięta ze względu na odwzorowanie UMS oraz ze względu na odwrotne odwzorowanie UMS, tzn.
jeżeli $L \in \mathcal{L}_{RG}$ to wtedy $M(L) \in \mathcal{L}_{RG}$ oraz $M^{-1}(L) \in \mathcal{L}_{RG}$

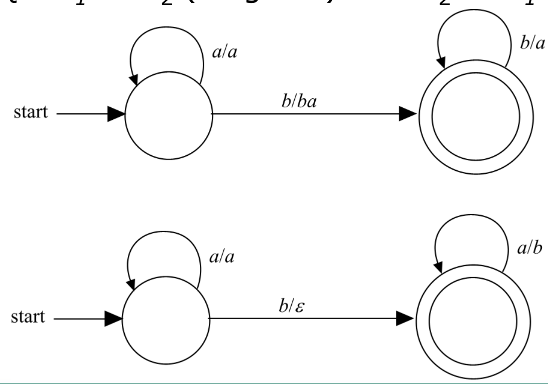
Twierdzenie: Klasa języków bezkontekstowych jest zamknięta ze względu na odwzorowanie UMS oraz ze względu na odwrotne odwzorowanie UMS, tzn.
jeżeli $L \in \mathcal{L}_{BK}$ to wtedy $M(L) \in \mathcal{L}_{BK}$ oraz $M^{-1}(L) \in \mathcal{L}_{BK}$

Twierdzenie: Klasa języków rekurencyjnie przeliczalnych jest zamknięta ze względu na odwzorowanie UMS oraz ze względu na odwrotne odwzorowanie UMS, tzn.
jeżeli $L \in \mathcal{L}_{RP}$ to wtedy $M(L) \in \mathcal{L}_{RP}$ oraz $M^{-1}(L) \in \mathcal{L}_{RP}$

Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer

<u>Przykład:</u>

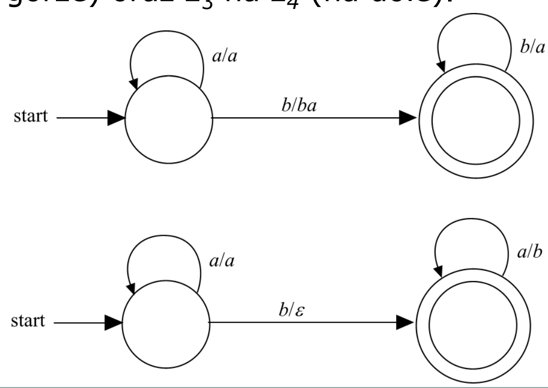
Niech $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ i $L_2 = \{a^n b a^n \mid n \geq 1\}$.
Na poniższym rysunku pokazana jest UMS
odwzorowująca L_1 na L_2 (na górze) oraz L_2 na L_1 (na dole).



Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer

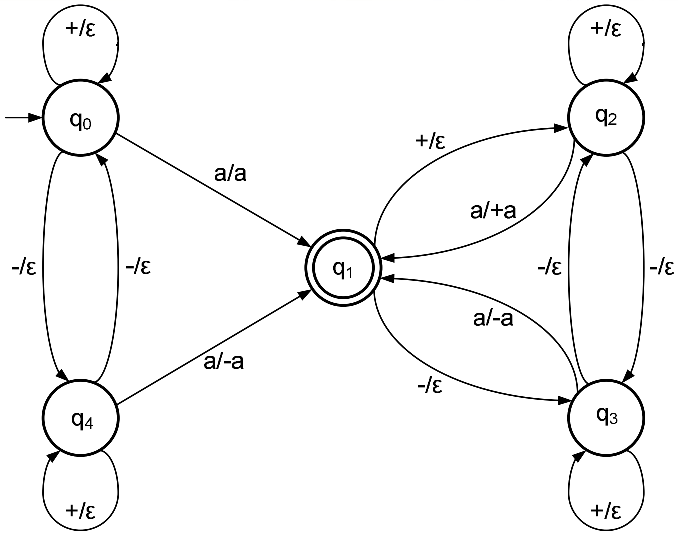
<u>Przykład:</u>

Niech L_1=***a*bb**** ; L_2=***a*baa**** i L_3=***a*ba**** *oraz* L_4=***a*b****.
Te same UMS co poprzednio odwzorowują „naprawdę”
L_1 na L_2 (na górze) oraz L_3 na L_4 (na dole).



Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer

Przykład:



Uogólniona maszyna sekwencyjna, transducer

Przykład:

we: +-+-+*a*++-*a*-+-*a*

wy: *a*-*a*+*a*

$L_{we} = (+|-)^{*}a((+|-)(+|-)^{*}a)^{*}$

$L_{wy} = (\varepsilon|-)a((+|-)a)^{*}$