Rozwiązania zadań testowych autorstwa studentów: Piotr Lubczyński, Marcin Czerenko, Karol Bieleń, Rafał Zemła, Wojciech Musiał, Jan Malina, Jakub Czapiga, Oleksandr Masliukivskyi, Andrzej Kępka

2.1 Wybierz prawdziwe stwierdzenia:

[NIE] **(A)** $\forall L_1, L_2 \quad L_1 = L_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $L_1{}^* = L_2{}^*$.

Przyjmijmy $L_1=\{\ \varepsilon, a\}$ oraz $L_2=\{a\}$.
W tym przypadku $L_1{}^* = L_2{}^*$, ale $L_1 \neq L_2$
więc nie zachodzi $L_1{}^* = L_2{}^* \Rightarrow L_1 = L_2$
więc tym bardziej nie zachodzi $L_1{}^* = L_2{}^* \Leftrightarrow L_1 = L_2$

[NIE] **(B)** $(\emptyset \cup \emptyset^*) \cap \left(\neg\emptyset - (\emptyset\emptyset^*)\right) = \emptyset$

($\neg\emptyset$ jest dopełnieniem $\emptyset$ względem niepustego zbioru U)
$\emptyset^* = \{\varepsilon\}$ (gwiazdka Kleene'go) więc $(\emptyset \cup \emptyset^*) = \{\varepsilon\}$
$\neg\emptyset = U - \emptyset = U$
$(\emptyset\emptyset^*) = \emptyset$ (konkatenacja ze zbiorem pustym)
$(\emptyset \cup \emptyset^*) \cap \left(\neg\emptyset - (\emptyset\emptyset^*)\right) = \{\varepsilon\} \cap (U - \emptyset) = \{\varepsilon\} \cap U$
$\{\varepsilon\} \cap U = \emptyset$ gdy $\varepsilon \notin U$ ale $\{\varepsilon\} \cap U \neq \emptyset$ gdy $\varepsilon \in U$

[NIE] **(C)** Każdy język nieskończony jest dopełnieniem języka skończonego.

Przyjmijmy $L_1 = \{\ 0^n \mid n \geq 0\}$ oraz $L_2 = \mathbf{0}^*\mathbf{1}(\mathbf{0}|\mathbf{1})^*$. W tym wypadku L_2 jest językiem nieskończonym oraz dopełnieniem języka L_1, który również jest językiem nieskończonym, więc L_2 jest dopełnieniem języka nieskończonego.

[TAK] **(D)** $\forall L \quad L\emptyset = \emptyset L$

Ponieważ: $\forall L \quad L\emptyset = \emptyset L = \emptyset$ (podane jako tożsamość w wykładzie przy omawianiu języków regularnych). Konkatenacja jakiegokolwiek języka ze zbiorem pustym daje zbiór pusty.

[NIE] **(E)** $\forall L, M \quad LM = \emptyset \Rightarrow L = \emptyset \wedge M = \emptyset$

Korzystając z tej samej tożsamości co w podpunkcie (D):
$\forall L \quad L\emptyset = \emptyset L = \emptyset$ można stwierdzić, że wystarczy, aby jeden z języków L, M był zbiorem pustym, czyli aby to zdanie było poprawne należałoby zamienić koniunkcję na alternatywę.

[NIE] **(F)** $L^2 = L \Rightarrow L = \emptyset \vee L = \{\varepsilon\}$

Z definicji $L^2 = LL$, więc $L = LL$ wtedy i tylko wtedy, gdy konkatenacja dowolnych dwóch słów z języka L również należy do języka L.
Oczywiście ta sytuacja zachodzi, gdy $L = \emptyset$ lub $L = \{\varepsilon\}$ jednak zachodzi również wtedy, gdy $L = \Sigma^*$ dla dowolnego alfabetu Σ, ponieważ wtedy język L jest nieskończonym złożeniem z sobą samym (gwiazdka Kleene'go), więc kolejne złożenia go nie modyfikują.

2.2. Wybierz prawdziwe stwierdzenia:

[TAK] **(A)** Istnieją nieskończone języki L_1 oraz L_2 nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$ takie, że $L_1 \not\subseteq L_1 L_2$ oraz $L_2 \not\subseteq L_1 L_2$

$L_1 = \mathbf{a}^+$, $L_2 = \mathbf{b}^+$

$L_1 L_2 = \mathbf{a}^+\mathbf{b}^+$

Wtedy:

$a \notin L_1 L_2$

$b \notin L_1 L_2$

[TAK] **(B)** Istnieją języki L_1 oraz L_2 nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$ takie, że $(L_1 \cup L_2)^* \neq L_1^* \cup L_2^*$

$L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$

$(L_1 \cup L_2)^* = \{a, b\}^*$

$L_1^* \cup L_2^* = \{a\}^* \cup \{b\}^*$

$\{a, b\}^* \neq \{a\}^* \cup \{b\}^*$

[TAK] **(C)** Istnieją języki L_1, L_2 oraz L_3 nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$ takie, że $(L_1 \cap L_2)\, L_3 \neq (L_1 L_3) \cap (L_2 L_3)$

$L_1 = \{ab\}, L_2 = \{a\}, L_3 = \{b, \varepsilon\}$

$(L_1 \cap L_2)\, L_3 = \varnothing L_3 = \varnothing$

$(L_1 L_3) \cap (L_2 L_3) = \{abb, ab\} \cap \{ab, a\} = \{ab\}$

$\varnothing \neq \{ab\}$

[TAK] **(D)** Istnieje nieskończony język L taki, że $\forall i \geq 1 \;\; L^i \neq L^{i+1}$

$L = \{\varepsilon, a, b, bb, bbb, bbbb\ldots\}$

$L^1 = L$

$L^2 = \{\varepsilon, a, aa, ab, abb, abbb, \ldots, b, bb, bbb, bbbb\ldots\}$

$L^3 = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaab, aabb, ab, abb, abbb, \ldots, b, bb, bbb, bbbb\ldots\}$

Zauważyć można, że spełniona jest zależność: $\forall i \geq 1 \;\; a^{i+1} \in L^{i+1} \wedge a^{i+1} \notin L^i$

[NIE] **(E)** Oznaczamy przez $PREFIX(L)$ zbiór prefiksów słów języka L oraz przez $SUFFIX(L)$ zbiór sufiksów słów języka L. Wtedy: $PREFIX(L)\ SUFFIX(L) = L$

$L = \{a, b, c\}$

$PREFIX(L) = \{\varepsilon, a, b, c\}$

$SUFFIX(L) = \{\varepsilon, a, b, c\}$

$PREFIX(L)\ SUFFIX(L) = \{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$

Więc $PREFIX(L)\ SUFFIX(L) \neq L$

2.3. Wybierz prawdziwe stwierdzenia:

[NIE] **(A)** Jeśli $x \notin L_1$ oraz $y \notin L_2$ to $xy \notin L_1L_2$
- przykład: $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_2 = \{aa\}$ zatem $a \notin L_1$ i $a \notin L_2$ i $aa \in L_1L_2$

[TAK] **(B)** Istnieje język L taki że $L \neq LL$ ale $LL = L^*$
- przykład: $L = \{ \varepsilon, a, a^3, a^5, \ldots\}$, $LL = \{ \varepsilon, a, a^2, a^3, \ldots\} = L^*$

[TAK] **(C)** Istnieją języki L_1, L_2 takie że $L_1 \cap L_2 = \varnothing$ oraz $L_1^* = L_2^*$
- przykład: $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_2 = \varnothing$

[NIE] **(D)** Niech $|L|$ oznacza liczbę słów języka L. Wtedy $|LM| = |L|\ |M|$
- przykład: $L = \{aa, a\}$, $M = \{b, ab\}$ wówczas $LM = \{aab, aaab, ab\}$

[NIE] **(E)** Niech $\bar{L}$ oznacza dopełnienie języka L. Wtedy $\overline{LM} = \bar{L}\bar{M}$
- przykład: $L = \mathbf{a}^+$, $M = \{\varepsilon\}$ wówczas $LM = \mathbf{a}^+$, $\bar{L} = \{\varepsilon\}$, $\bar{M} = \mathbf{a}^+$,
$\overline{LM} = \{\varepsilon\}$, $\bar{L}\bar{M} = \mathbf{a}^+$

[TAK] **(F)** Istnieją języki L_1, L_2 takie że żaden nie zawiera się z drugim oraz
$L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- przykład: $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_2 = \{a\}$, $L_1 \not\subset L_2$, $L_2 \not\subset L_1$,
$L_1^* \cup L_2^* = \mathbf{a}^*$, $(L_1 \cup L_2)^* = \mathbf{a}^*$

2.4. Wybierz prawdziwe stwierdzenia:

[TAK] **(A)** $\forall L_1, L_2, L_3 \quad L_1(L_2 \cap L_3) \subseteq (L_1L_2) \cap (L_1L_3)$
Tak, załóżmy, że słowo $w \in L_1(L_2 \cap L_3)$. Z postaci języka wynika, że słowo to da się przedstawić w postaci $w = uv$, przy czym $u \in L_1$ oraz $v \in (L_2 \cap L_3)$. Stąd $v \in L_2 \wedge v \in L_3$ a stąd z kolei
$uv \in L_1L_2 \wedge uv \in L_1L_3$ czyli $uv \in L_1L_2 \cap L_1L_3$.

[NIE] **(B)** $\forall L_1, L_2, L_3 \quad (L_1L_2) \cap (L_1L_3) \subseteq L_1(L_2 \cap L_3)$
Nie, ponieważ to prawa strona na pewno zawiera się w lewej stronie (patrz punkt (A)). Weźmy pod uwagę przykład, w którym mamy dane języki:
$L_1 = \{\varepsilon, a\}, L_2 = \{a\}, L_3 = \{aa\}$.
Jeżeli języki L_2 oraz L_3 są rozłączne względem siebie, to ich iloczyn daje zbiór pusty (ϕ), a złożenie języka L_1 ze zbiorem pustym daje również zbiór pusty (ϕ). Natomiast w przypadku iloczynu złożeń języków (część prawa) możemy otrzymać jeszcze jakieś słowa. Na powyższym przykładzie uzyskujemy:
$L_1(L_2 \cap L_3) = \phi$
$(L_1L_2) \cap (L_1L_3) = \{aa\}$
$\phi \not\supseteq \{aa\}$

[NIE] **(C)** Niech $|L|$ oznacza liczbę słów języka L. Jeśli L jest językiem skończonym to $|L^*| > |L|$.

Kontrprzykładem może być $L = \{\varepsilon\}$, gdyż wtedy $L^* = \{\varepsilon\}$, $|L^*| = |L|$; co innego, gdyby w temacie zadania była słaba nierówność.

[TAK] **(D)** Niech $\Sigma = \{a, b\}, L = \{x \epsilon \Sigma^* \,||x|_a \neq |x|_b\} \cup \{\varepsilon\}$, gdzie $|x|_a$ oznacza liczbę wystąpień symbolu a w słowie x. Wtedy $L^2 = \Sigma^*$

$L^2 = L^1L = LL$

Tak, ponieważ początkowy język L umożliwiał stworzenie każdego słowa z wyjątkiem takich, w których liczba wystąpień liter a była jednakowa liczbie wystąpień liter b w słowie. W przypadku złożenia dwóch takich języków możemy złożyć ze sobą dwa słowa, które osobno nie spełniają powyższej zależności, natomiast po ich złożeniu możemy otrzymywać słowa o jednakowej liczbie liter a i b**.**

[TAK] **(E)** Istnieją nieskończone języki L_1, L_2 takie że $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ oraz $L_1L_2 = L_2L_1$

Na przykład L_1 zawiera słowa nad $\{a\}$ o długości parzystej, L_2 zawiera słowa nad $\{a\}$ o długości nieparzystej. Nie mają części wspólnej, ale złożenie słowa nieparzystego z parzystym i parzystego z nieparzystym są tożsame.

2.5. Wybierz prawdziwe stwierdzenia:

[TAK] **(A)** $\{\varepsilon\} \subseteq A^*$

Z definicji gwiazdki Kleene'ego.

$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots = \{\varepsilon\} \cup A \cup AA \cup \ldots$

[TAK] **(B)** $A \subseteq A^*$

Z definicji gwiazdki Kleene'ego.

[TAK] **(C)** $A^*A^* \subseteq A^*$

$A^*A^* = (A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots)(A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots) = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$

[TAK] **(D)** $(\{\varepsilon\} \subseteq M \wedge A \subseteq M \wedge MM \subseteq M) \Rightarrow A^* \subseteq M$

Skoro $MM \subseteq M$ to $M = MM = MMMM = \cdots$

Biorąc pod uwagę powyższą zależność oraz $\{\varepsilon\} \subseteq M \wedge A \subseteq M$ można wnioskować, że $A^* \subseteq M$.

[NIE] **(E)** $A^+ = A^* - \{\varepsilon\}$

Jeżeli A zawiera ε to równość jest fałszywa.

[NIE] **(F)** $(L^+)^+ = L^+L^+$

$(L^+)^+ = (L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots)^+ = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots$

$L^+L^+ = (L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots)(L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots) = L^2 \cup L^3 \cup L^4 \cup \ldots$

[TAK] **(G)** $L^+L^+ \subseteq (L^+)^+$

$L^2 \cup L^3 \cup L^4 \cup \ldots \subseteq L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots$

2.6. Wybierz prawdziwe stwierdzenia:

[TAK] **(A)** $A^*A^* = A^*$

- ponieważ $A^*A^* = (A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots)(A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots) =$
$= A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots = A^*$

[TAK] **(B)** $(A^*)^* = A^*$

- ponieważ $(A^*)^* = (A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots)^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots = A^*$

[NIE] **(C)** $(A \cup B)^* = (A^*B)^*$

- ponieważ po prawej stronie nie możemy skończyć elementem z A

[TAK] **(D)** $(L^*)^R = (L^R)^*$

- ponieważ $(L^*)^R = (L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots)^R =$
$=(L^0)^R \cup (L^1)^R \cup (L^2)^R \cup \ldots = (L^R)^0 \cup (L^R)^1 \cup (L^R)^2 \cup \ldots = (L^R)^*$

[TAK] **(E)** $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$

- ponieważ jeśli wszystkie słowa z A występują w B, to domknięcie B zawiera wszystkie możliwe kombinacje słów z A (czyli A^*)

[TAK] **(F)** $A \subseteq B^* \Rightarrow A^* \subseteq B^*$

- podobnie jak w (E)

[TAK] **(G)** $(A \cup B)^* = (A^*B^*)^*$

- ponieważ prawa strona jest dowolnym ciągiem wyrazów z A i B, więc jest równa domknięciu ich sumy

2.7. Wybierz prawdziwe stwierdzenia:

[NIE] **(A)** $A^* \subseteq B^* \Rightarrow A \subseteq B$

Nie zachodzi, gdy A składa się tylko z słowa pustego, a B nie zawiera w sobie słowa pustego

[TAK] **(B)** $A=A^* \Leftrightarrow \{\varepsilon\} \subseteq A \wedge AA \subseteq A$

$AA \subseteq A \Rightarrow A=AA \wedge A=AAAA \wedge \ldots$ konkatenacja tego samego języka zawiera się w samym sobie, oraz język posiada słowo puste $\{\varepsilon\} \subseteq A$, więc język jest własnym domknięciem Kleene'ego

[TAK] **(C)** $(A \subseteq C^* \wedge B \subseteq C^*) \Rightarrow AB \subseteq C^*$

$(1)\ A=\{a: a \in A\} \wedge A \subseteq C^* \Rightarrow a \in C^*$

$(2)\ B=\{b: b \in B\} \wedge B \subseteq C^* \Rightarrow b \in C^*$

$AB =\{ab: a \in A \wedge b \in B\} \wedge (1) \wedge (2) \Rightarrow ab \in C^* \Rightarrow AB \subseteq C^*$

[TAK] **(D)** $AA^* \subseteq A^* \wedge A^*A \subseteq A^*$

$AA^*=A^*A$

$(1) A=\{a: a \in A\} \wedge A \subseteq A^* \Rightarrow a \in A^*$

$(2) A^* =\{b: b \in A^* \} \wedge A^* \subseteq A^* \Rightarrow b \in A^*$

$AA^*=\{ab: a \in A \wedge b \in A^* \} \wedge (1) \wedge (2) \Rightarrow ab \in A^* \Rightarrow AA^* \subseteq A^*$

[TAK] **(E)** $A \subseteq AB^* \wedge A \subseteq B^*A$

$A=AB^0 = B^0A \Rightarrow A \subseteq AB^* \wedge A \subseteq B^*A$

[TAK] **(F)** $B \cup AC \subseteq C \Rightarrow A^*B \subseteq C$

$B \cup AC \Leftrightarrow \{x \mid x \in B \vee x \in AC\}$

Jeśli $\{x \mid x \in B\} \wedge B \subseteq C$ to każdy łańcuch z B należy do C.

Jeśli $AC \subseteq C$ to $(a \in A \wedge c \in C) \Rightarrow ac \in AC \Rightarrow aac \in AC \Rightarrow AC \subseteq A^*C$

Jeśli $B \subseteq C \wedge AC \subseteq A^*C$ to $A^*B \subseteq C$

2.8. Wybierz prawdziwe stwierdzenia:

[TAK] **(A)** $A \subseteq C^* \Rightarrow (AC^* \subseteq C^* \wedge C^*A \subseteq C^*)$

$C^* = \{\epsilon\} \cup C^1 \cup C^2 \cup C^3 \ldots$ czyli wszystkie możliwe złożenia słów z C aż do nieskończoności. Wiemy, że A jest podzbiorem C^*. Skoro tak, to złożenie AC^* zawiera się w C^*, bo tak naprawdę składamy słowa z C ze słowami z C^* i te złożone słowa na pewno znajdą się gdzieś w C^* (gdyż C^* jest zbiorem nieskończonym). Kolejność złożenia nie ma tu znaczenia, toteż stwierdzenie jest prawdziwe

[NIE] **(B)** $A \subseteq A^*B \wedge A \subseteq BA^*$

Kontrprzykład: niech $A = \{a\}$, zaś $B = \{b\}$. Wówczas $A^*B=\{a^ib \mid i \geq 0\}$, zaś $BA^*=\{ba^i \mid i \geq 0\}$. A nie jest podzbiorem żadnego z nich.

[TAK] **(C)** $A \subseteq C \Rightarrow (A^*C^*=C^* \wedge C^*A^*=C^*)$

Podobnie jak w podpunkcie (A), A jest podzbiorem C, więc złożenia po prawej to tak naprawdę złożenia słów C^* z C^*, które na pewno znajdą się gdzieś w nieskończonym zbiorze C^* (kolejność złożenia nie ma tu znaczenia)

[TAK] **(D)** $A^* = \{\varepsilon\} \cup AA^* = \{\varepsilon\} \cup A^*A$

$\{\varepsilon\} \cup AA^*$ to inaczej $\{\varepsilon\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \ldots$ a to z kolei jest definicja A^*. Z kolei $\{\varepsilon\} \cup A^*A$ to inaczej $\{\varepsilon\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \ldots$, czyli nadal A^*

[TAK] **(E)** $B \subseteq A^* \Rightarrow A^*=(A \cup B)^*$

$B \subseteq A^*$ to inaczej $B \subseteq \{\varepsilon\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \ldots$ Zauważmy, że $A \cup B \subseteq A^*$, więc prawdą jest że $A^*=(A \cup B)^*$

2.9. Wybierz prawdziwe stwierdzenia:

[NIE] **(A)** $A^* = (A \cup B)^* \Rightarrow B \subseteq A$

Niech $A = \{a, aaa, aaaaa, \ldots\}$, $B = \{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa, \ldots\}$. Wtedy $A^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$, $B^* = \{\varepsilon, aa, aaaa, aaaaaa, \ldots\}$. $(A \cup B)^* = \{\varepsilon, a, aa, aaaa, \ldots\}$ czyli $A^* = (A \cup B)^*$, ale $B \not\subseteq A$.

[TAK] **(B)** $(A \cup B)^* = (A^*B^*)^*$

Tożsamość była podawana na wykładzie. Przykład: niech $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, czyli lewa strona to **(a|b)***, prawa strona to **(a*b*)***, czyli to są łańcuchy składające się z *a* i *b* w dowolnym porządku.

[TAK] **(C)** $(A \cup B)^* = A^* \cup A^*B(A \cup B)^*$

$A^* \cup A^*B(A \cup B)^*$ zawiera te wszystkie słowa z $(A \cup B)^*$, które zawierają jakieś podłańcuchy będące słowami z B. Dlatego potrzebne jest to A^*, w ten sposób dołączymy wszystkie słowa z $(A \cup B)^*$, które składają się tylko z podłańcuchów będących słowami z A.

[NIE] **(D)** $(A \cup A^R)^* = A^* \cup (A^*)^R$

Niech $A = \{ab\}$. Wtedy lewa strona to **(ab|ba)*** zaś prawa strona to **(ab)*|(ba)***. Czyli **(ab|ba)* ≠ (ab)*|(ba)***.

[TAK] **(E)** $X^* = (X^0 \cup X^1 \cup X^2 \cup \ldots \cup X^{n-1})\,(X^n)^*$

Bo pierwszy człon po prawej stronie generuje wszystkie X^i, $i = 0,1, \ldots, n\text{-}1$, i po złożeniu z $(X^n)^*$ da to całe X^*

[NIE] **(F)** $A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$

Niech $A = \{a, ab\}$, $B = \{a, b\}$. Wtedy $A^* \cap B^* = \{a, ab\}^*$ oraz $(A \cap B)^* = \{a\}^*$. Czyli $\{a,ab\}^* \neq \{a\}^*$.