

# Postać normalna Greibach

22 września 2006

## 1 Wprowadzenie

Poniższa tabela przedstawia najczęściej spotykane formy normalne.

Nazwa postaci	Forma produkcji
Postać normalna Greibach (GNF)	$N \rightarrow TN^*$
Słaba postać normalna Chomsky'ego	$N \rightarrow T \cup N^*$
Postać normalna Chomsky'ego (CNF)	$N \rightarrow T \cup N^2$
Rozszerzona postać normalna Chomsky'ego	$N \rightarrow T \cup N \cup N^2$
Kwadratowa postać normalna Greibach (2-GNF)	$N \rightarrow T \cup TN \cup TN^2$
Sześcienna postać normalna Greibach (3-GNF)	$N \rightarrow T \cup TN \cup TN^2 \cup TN^3$
Podwójna postać normalna Greibach	$N \rightarrow T \cup TN^*T$
Kwadratowa podwójna postać normalna Greibach	$N \rightarrow T \cup TNT \cup TN^2T$
Postać operatorowa	$N \rightarrow (T \cup N)^* - (T \cup N)^*N^2(T \cup N)^*$

### 1.1 Postać normalna Chomsky'ego

Wszystkie metody z wyjątkiem algorytmu Rosenkrantza zakładają, że gramatyka już jest w postaci normalnej Chomsky'ego lub pewnej odmianie postaci Chomsky'ego.

## 2 Metoda Paull'a

uporządkuj nieterminale jako  $\{A_1, \dots, A_n\}$ .

**for**  $i := 1$  to  $n$  **do**

**for**  $j := 1$  to  $i - 1$  **do**

**for** każda produkcja postaci  $A_i \rightarrow A_j\alpha$  **do**

      usuń produkcję  $A_i \rightarrow A_j\alpha$  z gramatyki

**for** każda produkcja postaci  $A_j \rightarrow \beta$  **do**

      dodaj  $A_i \rightarrow \beta\alpha$  do gramatyki

**end for**

**end for**

**end for**

**if**  $A_i$  jest bezpośrednio lewostronnie rekursywny **then**

  usuń produkcje  $A_i \rightarrow A_i\alpha_1 \mid \dots \mid A_i\alpha_r$

  usuń produkcje  $A_i \rightarrow \beta_1 \mid \dots \mid \beta_s$  (żadne  $\beta_k$  nie zaczyna się od  $A_i$ )

  dodaj produkcje  $A_i \rightarrow \beta_1 \mid \beta_1 A'_i \mid \dots \mid \beta_s \mid \beta_s A'_i$

  dodaj produkcje  $A'_i \rightarrow \alpha_1 \mid \alpha_1 A'_i \mid \dots \mid \alpha_r \mid \alpha_r A'_i$

**end if**

**end for**

**for**  $i := n$  downto 2 **do**

**for**  $j := n - 1$  downto 1 **do**

**for** każda produkcja postaci  $A_j \rightarrow A_i\alpha$  **do**

      usuń produkcję  $A_j \rightarrow A_i\alpha$

```

    for każda produkcja postaci  $A_i \rightarrow \beta_k$  do
      dodaj produkcję  $A_j \rightarrow \beta_k \alpha$ 
    end for
  end for
end for
end for
for  $i := n$  downto 1 do
  for  $j := n$  downto 1 do
    for każda produkcja postaci  $A'_j \rightarrow A_i \alpha$  do
      usuń produkcję  $A'_j \rightarrow A_i \alpha$ 
      for każda produkcja postaci  $A_i \rightarrow \beta_k$  do
        dodaj produkcję  $A'_j \rightarrow \beta_k \alpha$ 
      end for
    end for
  end for
end for
end for
end for

```

Algorytm generuje gramatyki w postaci normalnej o rozmiarze wykładniczym względem oryginalnej gramatyki.

### 3 Metoda Rosenkrantz'a

Metoda Rosenkrantz'a wykorzystuje szeregi potęgowe oraz związki między zbiorami produkcji a układami równań.

W metodzie Rosenkrantz'a odchodzi się od tradycyjnych oznaczeń na rzecz notacji używanej w algebrze liniowej. Przykładowo produkcje  $X \rightarrow aX \mid bY$  będziemy zapisywać  $X \rightarrow aX + bY$  lub  $X = aX + bY$ . Wyjątkowo w metodzie nie musi być przestrzegana konwencja w której nieterminalne oznaczane są dużymi literami alfabetu łacińskiego. Wygodniejsze często jest oznaczanie nieterminali jak zmiennych, np.  $x_1, x_2, \dots$ .

Rozwiązanie równania  $y = ay + b$  możemy uzyskać sposób mnemotechniczny. Przekształćmy równanie następująco:

$$(1 - a)y = b$$

$$y = \frac{1}{1-a}b$$

$$y = (1 + a + a^2 + \dots)b$$

Korzystając z definicji  $\star$  Kleene'ego otrzymujemy, że rozwiązaniem równania jest  $y = a^*b$ .

Z drugiej strony należy pamiętać, że powyższe postępowanie jest mnemotechniczne, uzyskana w podobny sposób odpowiedź  $y = ba^*$  nie jest poprawnym rozwiązaniem.

Ponieważ najczęściej z gramatyką związanych jest wiele równań korzysta się z notacji macierzowej.

Sprowadzanie do postaci normalnej Greibach.

Ogólnie gramatykę możemy opisać przy pomocy równania:

$Y = AY + B$ , gdzie  $Y$  oraz  $B$  są wektorami kolumnowymi.

Ponieważ rozważamy tylko gramatyki bezkontekstowe każdy element wektora  $Y$  jest pojedynczym nieterminaliem.

Zgodnie z powyższym wywodem rozwiązaniem ostatniego równania jest

$$Y = A^*B.$$

Po dokonaniu transpozycji otrzymujemy równanie

$$X = XG + F, \text{ gdzie dla zwiezlości oznaczono } X = Y^T, F = B^T, G = A^T \text{ oraz jego rozwiązanie } X = FG^*.$$

Z własności  $\star$  wynika, że  $G^* = I + GG^*$  a stąd  $X = F + FGG^*$ .

Oznaczając  $H = GG^*$  możemy zapisać:

$$X = FH + F.$$

Każdy term wektora  $F$  a więc i równania zaczyna się terminalem. Pozostaje tylko znaleźć równania definiujące elementy wektora  $H$ .

Na podstawie macierzy  $G$  można skonstruować graf zawierający  $n$  węzłów i krawędzie z węzła  $i$  do węzła  $j$ , jeśli  $G_{i,j} \neq \emptyset$ . Jeśli nie istnieje ścieżka z węzła  $i$  do węzła  $j$  to w macierzy  $H$  należy przyjąć  $H_{i,j} = \emptyset$ , gdyż  $H_{i,j}$  oznacza w grafie zbiór ścieżek z węzła  $i$  do węzła  $j$ .

Mnożąc lewostronnie związek  $G^* = I + GG^*$  przez  $G$  dostajemy takie równanie:

$$H = G + GH.$$

Musimy jeszcze sprowadzić ostatnie równanie to postaci normalnej Greibach. W tym celu z macierzy  $G$  konstruujemy nową, równoważną macierz  $K$ . Jeśli pewien term w macierzy  $G$  zaczyna się nieterminalem, nieterminal ten zastępowany jest definicją z równania  $X = FH + F$ .

W ten sposób otrzymujemy równanie  $H = K + KH$  w którym każdym term zaczyna się terminalem.

Mamy więc równania definiujące gramatykę w postaci w której każdy term zaczyna się terminalem:

$$X = FH + F$$

$$H = G + GH.$$

Aby otrzymać postać normalną Greibach wystarczy już tylko z każdym terminalem  $a$  związać nowy nieterminal  $C_a$  oraz produkcję  $C_a \rightarrow a$  i zastąpić każde wystąpienie terminala  $a$  nieterminalem  $C_a$  jeśli nie znajduje się on na skrajnie lewej pozycji termu.

Sprowadzanie do podwójnej postaci normalnej Greibach.

Rozwiązaniem równania  $x = Ax + b$  jest równanie definiujące  $x = A^*b = b + Ab + ABb$ , gdzie  $B = AA^*$  i może być zdefiniowane równaniem  $B = A + AA + ABA$ .

Macierz  $C$  otrzymywana jest z  $A$  poprzez zastąpienie każdego nieterminala kończącego pewien term z  $A$  jego definicją z równania definiującego. W ten sposób macierz  $C$  równoważna jest macierzy  $A$  i każdy term w  $C$  zaczyna i kończy się terminalem. Równanie definiujące ma postać:  $B = C + AC + ABC$ .

**Przykład 3.1** Rozważmy gramatykę:

$$X_1 \rightarrow X_1aX_2 + b$$

$$X_2 \rightarrow X_2bX_1 + a$$

Zauważmy, że po dokonaniu transpozycji równania mogą być zapisane w postaci

$$X = XG + F$$

gdzie  $X$  i  $F$  są wektorami wierszowymi,  $G$  jest macierzą kwadratową.

Równania są następujące:

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} aX_2 & \emptyset \\ \emptyset & bX_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest  $X = FG^*$ . Zauważając, że  $G^* = I + GG^*$  dostajemy  $X = FH + F$  gdzie  $H = GG^*$ .

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & \emptyset \\ \emptyset & H_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & a \end{bmatrix}$$

Obliczamy macierz  $H$ , gdzie  $H = KH + K$

$$K = \begin{bmatrix} aX_2 & \emptyset \\ \emptyset & bX_1 \end{bmatrix}$$

Mamy:

$$\begin{aligned} H_{11} &= aX_2H_{11} + aX_2 \\ H_{22} &= bX_1H_{22} + bX_1 \end{aligned}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} X_1 &= bH_{11} + b \\ X_2 &= aH_{22} + a \\ H_{11} &= aX_2H_{11} + aX_2 \\ H_{22} &= bX_1H_{22} + bX_1 \end{aligned}$$

Powyższe równania są w postaci normalnej Greibach. Aby otrzymać podwójną postać normalną Greibach zapiszmy równania w postaci  $X = AX + b$ . Rozwiązaniem równania jest  $X = A^*b = b + Ab + ABb$ , gdzie  $B = AA^*$  i może być zdefiniowane przez  $B = C + AC + ABC$ , gdzie macierz  $C$  otrzymujemy z  $A$  przez zastąpienie najbardziej wysuniętych na prawo zmiennych ich odpowiednikami zakończonymi terminalami. Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ H_{11} \\ H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & b & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a \\ \emptyset & a & aX_2 & \emptyset \\ b & \emptyset & \emptyset & bX_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ H_{11} \\ H_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ a \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & b & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a \\ \emptyset & a & aa + aaB_{41}b + aaB_{42}a & \emptyset \\ b & \emptyset & \emptyset & bb + bbB_{31}b + bbB_{32}a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & b & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a \\ \emptyset & a & aa + aaB_{41}b + aaB_{42}a & \emptyset \\ b & \emptyset & \emptyset & bb + bbB_{31}b + bbB_{32}a \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & b & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a \\ \emptyset & a & aX_2 & \emptyset \\ b & \emptyset & \emptyset & bX_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & b & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a \\ \emptyset & a & aa + aaB_{41}b + aaB_{42}a & \emptyset \\ b & \emptyset & \emptyset & bb + bbB_{31}b + bbB_{32}a \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & b & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a \\ \emptyset & a & aX_2 & \emptyset \\ b & \emptyset & \emptyset & bX_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & b & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a \\ \emptyset & a & aa + aaB_{41}b + aaB_{42}a & \emptyset \\ b & \emptyset & \emptyset & bb + bbB_{31}b + bbB_{32}a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\left[ \begin{array}{l}
B_{11} \\
B_{12} \\
B_{13} \\
B_{14} \\
B_{21} \\
B_{22} \\
B_{23} \\
B_{24} \\
B_{31} \\
B_{32} \\
B_{33} \\
B_{34} \\
B_{41} \\
B_{42} \\
B_{43} \\
B_{44}
\end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l}
bB_{34}b \\
ba + bB_{33}a \\
b + baa + baaB_{41}b + baaB_{42}a + bB_{31}b + bB_{33}aa + bB_{33}aaB_{41}b + bB_{33}aaB_{42}a \\
bB_{32}a + bB_{34}bb + bB_{34}bbB_{31}b + bB_{34}bbB_{32}a \\
ab + aB_{44}b \\
aB_{43}a \\
aB_{41}b + aB_{43}aa + aB_{43}aaB_{41}b + aB_{43}aaB_{42}a \\
a + abb + abbB_{31}b + abbB_{32}a + aB_{42}a + aB_{44}bb + aB_{44}bbB_{31}b + aB_{44}bbB_{32}a \\
aB_{24}b + aX_2B_{34}b \\
a + aX_2a + aB_{23}a + aX_2B_{33}a \\
aa + aaB_{41}b + aaB_{42}a + aX_2aa + aX_2aaB_{41}b + aX_2aaB_{42}a + \\
aB_{21}b + aX_2B_{31}b + aB_{23}aa + aB_{23}aaB_{41}b + aB_{23}aaB_{42}a + aX_2B_{33}aa + aX_2B_{33}aaB_{41}b + aX_2B_{33}aaB_{42}a \\
aa + \\
aB_{22}a + aX_2B_{32}a + aB_{24}bb + aB_{24}bbB_{31}b + aB_{24}bbB_{32}a + aX_2B_{34}bb + aX_2B_{34}bbB_{31}b + aX_2B_{34}bbB_{32}a \\
b + bX_1b + bB_{14}b + bX_1B_{44}b \\
bB_{13}a + bX_1B_{43}a \\
bb + \\
bB_{11}b + bX_1B_{41}b + bB_{13}aa + bB_{13}aaB_{41}b + bB_{13}aaB_{42}a + bX_1B_{43}aa + bX_1B_{43}aaB_{41}b + bX_1B_{43}aaB_{42}a \\
bb + bbB_{31}b + bbB_{32}a + bX_1bb + bX_1bbB_{31}b + bX_1bbB_{32}a + \\
bB_{12}a + bX_1B_{42}a + bB_{14}bb + bB_{14}bbB_{31}b + bB_{14}bbB_{32}a + bX_1B_{44}bb + bX_1B_{44}bbB_{31}b + bX_1B_{44}bbB_{32}a
\end{array} \right]
\end{array}$$

Ostatecznie, uwzględniając, że symbole  $H_{11}, H_{22}$  są nieosiągalne, otrzymujemy gramatykę:

$$\begin{aligned}
X_1 &\rightarrow b + bB_{31}b + bB_{32}a \\
X_2 &\rightarrow a + aB_{41}b + aB_{42}a \\
B_{11} &\rightarrow bB_{34}b \\
B_{12} &\rightarrow ba + bB_{33}a \\
B_{13} &\rightarrow b + baa + baaB_{41}b + baaB_{42}a + bB_{31}b + bB_{33}aa + bB_{33}aaB_{41}b + bB_{33}aaB_{42}a \\
B_{14} &\rightarrow bB_{32}a + bB_{34}bb + bB_{34}bbB_{31}b + bB_{34}bbB_{32}a \\
B_{21} &\rightarrow ab + aB_{44}b \\
B_{22} &\rightarrow aB_{43}a \\
B_{23} &\rightarrow aB_{41}b + aB_{43}aa + aB_{43}aaB_{41}b + aB_{43}aaB_{42}a \\
B_{24} &\rightarrow a + abb + abbB_{31}b + abbB_{32}a + aB_{42}a + aB_{44}bb + aB_{44}bbB_{31}b + aB_{44}bbB_{32}a \\
B_{31} &\rightarrow aB_{24}b + aX_2B_{34}b \\
B_{32} &\rightarrow a + aX_2a + aB_{23}a + aX_2B_{33}a \\
B_{33} &\rightarrow aa + aaB_{41}b + aaB_{42}a + aX_2aa + aX_2aaB_{41}b + aX_2aaB_{42}a + \\
&\quad aB_{21}b + aX_2B_{31}b + aB_{23}aa + aB_{23}aaB_{41}b + aB_{23}aaB_{42}a + aX_2B_{33}aa + aX_2B_{33}aaB_{41}b + aX_2B_{33}aaB_{42}a \\
B_{34} &\rightarrow aa + \\
&\quad aB_{22}a + aX_2B_{32}a + aB_{24}bb + aB_{24}bbB_{31}b + aB_{24}bbB_{32}a + aX_2B_{34}bb + aX_2B_{34}bbB_{31}b + aX_2B_{34}bbB_{32}a \\
B_{41} &\rightarrow b + bX_1b + bB_{14}b + bX_1B_{44}b \\
B_{42} &\rightarrow bB_{13}a + bX_1B_{43}a \\
B_{43} &\rightarrow bb + \\
&\quad bB_{11}b + bX_1B_{41}b + bB_{13}aa + bB_{13}aaB_{41}b + bB_{13}aaB_{42}a + bX_1B_{43}aa + bX_1B_{43}aaB_{41}b + bX_1B_{43}aaB_{42}a \\
B_{44} &\rightarrow bb + bbB_{31}b + bbB_{32}a + bX_1bb + bX_1bbB_{31}b + bX_1bbB_{32}a + \\
&\quad bB_{12}a + bX_1B_{42}a + bB_{14}bb + bB_{14}bbB_{31}b + bB_{14}bbB_{32}a + bX_1B_{44}bb + bX_1B_{44}bbB_{31}b + bX_1B_{44}bbB_{32}a
\end{aligned}$$

**Przykład 3.2** Rozważmy gramatykę:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow SA + b \\
A &\rightarrow BA + a \\
B &\rightarrow SA + AB
\end{aligned}$$

Mamy następujące równania:

$$\begin{aligned}
[ S \quad A \quad B ] &= [ S \quad A \quad B ] \begin{bmatrix} A & \emptyset & A \\ \emptyset & \emptyset & B \\ \emptyset & A & \emptyset \end{bmatrix} + [ b \quad a \quad \emptyset ] \\
[ S \quad A \quad B ] &= [ b \quad a \quad \emptyset ] \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ \emptyset & H_{22} & H_{23} \\ \emptyset & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} + [ b \quad a \quad \emptyset ]
\end{aligned}$$

Obliczamy macierz  $H$ , gdzie  $H = KH + K$

$$K = \begin{bmatrix} bH_{12} + aH_{22} + a & \emptyset & bH_{12} + aH_{22} + a \\ \emptyset & \emptyset & bH_{13} + aH_{23} \\ \emptyset & bH_{12} + aH_{22} + a & \emptyset \end{bmatrix}$$

Mamy:

$$\begin{aligned}
H_{11} &= bH_{12}H_{11} + aH_{22}H_{11} + aH_{11} + bH_{12} + aH_{22} + a \\
H_{12} &= bH_{12}H_{12} + aH_{22}H_{12} + aH_{12} + bH_{12}H_{32} + aH_{22}H_{32} + aH_{32} \\
H_{22} &= bH_{13}H_{32} + aH_{23}H_{32} \\
H_{32} &= bH_{12}H_{22} + aH_{22}H_{22} + aH_{22} + bH_{12} + aH_{22} + a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{13} &= bH_{12}H_{13} + aH_{22}H_{13} + aH_{13} + bH_{12}H_{33} + aH_{22}H_{33} + aH_{33} + bH_{12} + aH_{22} + a \\
H_{23} &= bH_{13}H_{33} + aH_{23}H_{33} + bH_{13} + aH_{23} \\
H_{33} &= bH_{12}H_{23} + aH_{22}H_{23} + aH_{23}
\end{aligned}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
S &= bH_{11} + b \\
A &= bH_{12} + aH_{22} + a \\
B &= bH_{13} + aH_{23} \\
H_{11} &= bH_{12}H_{11} + aH_{22}H_{11} + aH_{11} + bH_{12} + aH_{22} + a \\
H_{12} &= bH_{12}H_{12} + aH_{22}H_{12} + aH_{12} + bH_{12}H_{32} + aH_{22}H_{32} + aH_{32} \\
H_{22} &= bH_{13}H_{32} + aH_{23}H_{32} \\
H_{32} &= bH_{12}H_{22} + aH_{22}H_{22} + aH_{22} + bH_{12} + aH_{22} + a \\
H_{13} &= bH_{12}H_{13} + aH_{22}H_{13} + aH_{13} + bH_{12}H_{33} + aH_{22}H_{33} + aH_{33} + bH_{12} + aH_{22} + a \\
H_{23} &= bH_{13}H_{33} + aH_{23}H_{33} + bH_{13} + aH_{23} \\
H_{33} &= bH_{12}H_{23} + aH_{22}H_{23} + aH_{23}
\end{aligned}$$

Po usunięciu symboli nieosiągalnych otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
S &= bH_{11} + b \\
H_{11} &= bH_{12}H_{11} + aH_{22}H_{11} + aH_{11} + bH_{12} + aH_{22} + a \\
H_{12} &= bH_{12}H_{12} + aH_{22}H_{12} + aH_{12} + bH_{12}H_{32} + aH_{22}H_{32} + aH_{32} \\
H_{22} &= bH_{13}H_{32} + aH_{23}H_{32} \\
H_{32} &= bH_{12}H_{22} + aH_{22}H_{22} + aH_{22} + bH_{12} + aH_{22} + a \\
H_{13} &= bH_{12}H_{13} + aH_{22}H_{13} + aH_{13} + bH_{12}H_{33} + aH_{22}H_{33} + aH_{33} + bH_{12} + aH_{22} + a \\
H_{23} &= bH_{13}H_{33} + aH_{23}H_{33} + bH_{13} + aH_{23} \\
H_{33} &= bH_{12}H_{23} + aH_{22}H_{23} + aH_{23}
\end{aligned}$$

**Przykład 3.3** Rozważmy gramatykę:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow AB + BS \\
A &\rightarrow BA + a \\
B &\rightarrow AS + b
\end{aligned}$$

Mamy następujące równania:

$$\begin{aligned}
[ S \quad A \quad B ] &= [ S \quad A \quad B ] \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ B & \emptyset & S \\ S & A & \emptyset \end{bmatrix} + [ \emptyset \quad a \quad b ] \\
[ S \quad A \quad B ] &= [ \emptyset \quad a \quad b ] \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} + [ \emptyset \quad a \quad b ]
\end{aligned}$$

Obliczamy macierz  $H$ , gdzie  $H = KH + K$

$$K = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ aH_{23} + bH_{33} + b & \emptyset & aH_{21} + bH_{31} \\ aH_{21} + bH_{31} & aH_{22} + bH_{32} + a & \emptyset \end{bmatrix}$$

Mamy:

$$\begin{aligned}
H_{21} &= aH_{21}H_{31} + bH_{31}H_{31} + aH_{23} + bH_{33} + b \\
H_{31} &= aH_{22}H_{21} + bH_{32}H_{21} + aH_{21} + bH_{31} \\
H_{22} &= aH_{21}H_{32} + bH_{31}H_{32} \\
H_{32} &= aH_{22}H_{22} + bH_{32}H_{22} + aH_{22} + bH_{32} + a \\
H_{23} &= aH_{21}H_{33} + bH_{31}H_{33} + aH_{21} + bH_{31} \\
H_{33} &= aH_{22}H_{23} + bH_{32}H_{23} + aH_{23}
\end{aligned}$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
S &= aH_{21} + bH_{31} \\
A &= aH_{22} + bH_{32} + a \\
B &= aH_{23} + bH_{33} + b \\
H_{21} &= aH_{21}H_{31} + bH_{31}H_{31} + aH_{23} + bH_{33} + b \\
H_{31} &= aH_{22}H_{21} + bH_{32}H_{21} + aH_{21} + bH_{31} \\
H_{22} &= aH_{21}H_{32} + bH_{31}H_{32} \\
H_{32} &= aH_{22}H_{22} + bH_{32}H_{22} + aH_{22} + bH_{32} + a \\
H_{23} &= aH_{21}H_{33} + bH_{31}H_{33} + aH_{21} + bH_{31} \\
H_{33} &= aH_{22}H_{23} + bH_{32}H_{23} + aH_{23}
\end{aligned}$$

Po usunięciu symboli nieosiągalnych otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
S &= aH_{21} + bH_{31} \\
H_{21} &= aH_{21}H_{31} + bH_{31}H_{31} + aH_{23} + bH_{33} + b \\
H_{31} &= aH_{22}H_{21} + bH_{32}H_{21} + aH_{21} + bH_{31} \\
H_{22} &= aH_{21}H_{32} + bH_{31}H_{32} \\
H_{32} &= aH_{22}H_{22} + bH_{32}H_{22} + aH_{22} + bH_{32} + a \\
H_{23} &= aH_{21}H_{33} + bH_{31}H_{33} + aH_{21} + bH_{31} \\
H_{33} &= aH_{22}H_{23} + bH_{32}H_{23} + aH_{23}
\end{aligned}$$

## 4 Metoda Autebert'a-Berstel'a-Boasson'a

Metoda ta jest także stosunkowo skomplikowana. W metodzie zakładamy, że gramatyka jest już w słabej postaci normalnej Chomsky'ego. Dla każdego nieterminala  $X$  zdefiniujemy:

$$L(a, X) = a^{-1}L(X) = \{ m \in N^* \mid X \xrightarrow[lm]{*} \alpha \rightarrow am, \alpha \in N^* \}$$

$$R(X, a) = R(X)a^{-1} = \{ m \in N^* \mid X \xrightarrow[rm]{*} \alpha \rightarrow ma, \alpha \in N^* \}$$

Oznaczmy też:

$$\mathcal{L} = \{ L(a, X) \mid a \in T, X \in N \}$$

$$\mathcal{R} = \{ R(a, X) \mid a \in T, X \in N \}$$

Zbiory  $L(a, X)$ ,  $R(X, a)$  są nieskończone, jednakże zbiory  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{R}$  są już skończone. W związku z tym także  $\mathcal{H}$  t.j. domknięcie  $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$  względem lewostronnego oraz prawostronnego ilorazu przez symbole terminalne jest zbiorem skończonym.

Konstrukcja gramatyki w postaci normalnej Greibach.

1. Każda produkcja terminalna oryginalnej gramatyki jest produkcją nowej gramatyki w postaci normalnej Greibach.
2. Dla każdej zmiennej  $X \in N$  oryginalnej gramatyki dodaj (skończony) zbiór produkcji  $X \rightarrow aL$ , gdzie  $a \in T$ ,  $L = L(a, X) \in \mathcal{H}$
3. Dla każdej nowej zmiennej  $L \in \mathcal{H}$  dodaj (skończony) zbiór produkcji  $L \rightarrow XL'$ , gdzie  $X \in N$ ,  $X^{-1}L \in \mathcal{H}$ . Jeśli  $\epsilon \in L$  dodaj produkcję  $L \rightarrow \epsilon$ .

4. W każdej nowej produkcji dodanej powyżej nieterminal rozpoczynający prawą stronę produkcji zastąp prawymi stronami wygenerowanymi w punkcie 2.

Konstrukcja gramatyki w sześcienniej podwójnej postaci normalnej Greibach.

1. Każdy język  $L \in \mathcal{H}$  zapisz jako sumę składników  $L'X$ , dla każdego  $X \in V$ , gdzie  $L' = LX^{-1}$ . Dodaj do sumy  $X$  jeśli  $\epsilon \in L'$ . Zastąp  $X$  sumą składników  $Ra$ , gdzie  $R$  jest zmienną związaną z językiem  $R(X, a)$ . W sumie uwzględnij  $a$  jeśli  $\epsilon \in R(X, a)$ .
2. Zastąp w gramatyce w postaci normalnej Greibach każdy skrajnie prawy nieterminal wyrażeniem otrzymanym w punkcie 1.

Konstrukcja gramatyki w kwadratowej podwójnej postaci normalnej Greibach.

Do rodziny zbiorów  $\mathcal{H}$  dodaj zmienne  $Y \in W$  reprezentujące  $L \cdot L' \in \mathcal{H}\mathcal{H}$ , gdzie  $L$  opisywany jest lewostronnym ilorzadem, zaś  $L'$  prawostronnym ilorzadem. Każdy iloczyn 4 kolejnych nieterminali zastąp iloczynem 2 elementów z  $W$ . Każdy iloczyn 3 kolejnych nieterminali zastąp iloczynem elementu z  $W$  i elementu z  $\mathcal{H}$ .

**Przykład 4.1** Ponownie rozważmy gramatykę:

$$\begin{aligned} X_1 &\rightarrow X_1aX_2 + b \\ X_2 &\rightarrow X_2bX_1 + a \end{aligned}$$

Na początku przekształcamy gramatykę do słabej postaci normalnej Chomsky'ego.

$$\begin{aligned} X_1 &\rightarrow X_1AX_2 + b \\ X_2 &\rightarrow X_2BX_1 + a \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Rozpatrzmy rodziny  $\mathcal{L}$  i  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{aligned} L(a, X_1) &= \emptyset & R(X_1, a) &= (X_1AX_2B)^*X_1A = L_2 \\ L(b, X_1) &= (AX_2)^* = L_0 & R(X_1, b) &= (X_1AX_2B)^* = L_3 \\ L(a, X_2) &= (BX_1)^* = L_1 & R(X_2, a) &= (X_2BX_1A)^* = L_4 \\ L(b, X_2) &= \emptyset & R(X_2, b) &= (X_2BX_1A)^*X_2B = L_5 \\ L(a, A) &= \{\epsilon\} = E & R(A, a) &= \{\epsilon\} = E \\ L(b, A) &= \emptyset & R(A, b) &= \emptyset \\ L(a, B) &= \emptyset & R(B, a) &= \emptyset \\ L(b, B) &= \{\epsilon\} = E & R(B, b) &= \{\epsilon\} = E \end{aligned}$$

Obliczmy domknięcie  $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$  względem lewostronnego oraz prawostronnego ilorazu.

$$\begin{array}{llll}
A^{-1}L_0 = & X_2(AX_2)^* & = L_6 & L_0X_2^{-1} = & (AX_2)^*A & = L_7 \\
B^{-1}L_1 = & X_1(BX_1)^* & = L_8 & L_1X_1^{-1} = & (BX_1)^*B & = L_9 \\
X_1^{-1}L_2 = & A(X_2BX_1A)^* & = L_{10} & L_2A^{-1} = & (X_1AX_2B)^*X_1 & = L_{11} \\
X_1^{-1}L_3 = & AX_2B(X_1AX_2B)^* & = L_{12} & L_3B^{-1} = & (X_1AX_2B)^*X_1AX_2 & = L_{13} \\
X_2^{-1}L_4 = & BX_1A(X_2BX_1A)^* & = L_{14} & L_4A^{-1} = & (X_2BX_1A)^*X_2BX_1 & = L_{15} \\
X_2^{-1}L_5 = & B(X_1AX_2B)^* & = L_{16} & L_5B^{-1} = & (X_2BX_1A)^*X_2 & = L_{17} \\
X_2^{-1}L_6 = & (AX_2)^* & = L_0 & L_6X_2^{-1} = & (X_2A)^* & = L_{18} \\
A^{-1}L_7 = & (X_2A)^* & = L_{18} & L_7A^{-1} = & (AX_2)^* & = L_0 \\
X_1^{-1}L_8 = & (BX_1)^* & = L_1 & L_8X_1^{-1} = & (X_1B)^* & = L_{19} \\
B^{-1}L_9 = & (X_1B)^* & = L_{19} & L_9B^{-1} = & (BX_1)^* & = L_1 \\
A^{-1}L_{10} = & (X_2BX_1A)^* & = L_4 & L_{10}A^{-1} = & (AX_2BX_1)^* & = L_{20} \\
X_1^{-1}L_{11} = & (AX_2BX_1)^* & = L_{20} & L_{11}X_1^{-1} = & (X_1AX_2B)^* & = L_3 \\
A^{-1}L_{12} = & X_2B(X_1AX_2B)^* & = L_5 & L_{12}B^{-1} = & (BX_1AX_2)^* & = L_{21} \\
X_1^{-1}L_{13} = & (AX_2BX_1)^*AX_2 & = L_{21} & L_{13}X_2^{-1} = & (X_1AX_2B)^*X_1A & = L_2 \\
B^{-1}L_{14} = & X_1A(X_2BX_1A)^* & = L_2 & L_{14}A^{-1} = & (AX_2BX_1)^* & = L_{22} \\
X_2^{-1}L_{15} = & (BX_1AX_2)^*BX_1 & = L_{22} & L_{15}X_1^{-1} = & (X_2BX_1A)^*X_2B & = L_5 \\
B^{-1}L_{16} = & (X_1AX_2B)^* & = L_3 & L_{16}B^{-1} = & (BX_1AX_2)^* & = L_{23} \\
X_2^{-1}L_{17} = & (BX_1AX_2)^* & = L_{23} & L_{17}X_2^{-1} = & (X_2BX_1A)^* & = L_4 \\
X_2^{-1}L_{18} = & A(X_2A)^* & = L_7 & L_{18}A^{-1} = & (X_2A)^*X_2 & = L_6 \\
X_1^{-1}L_{19} = & B(X_1B)^* & = L_9 & L_{19}B^{-1} = & (X_1B)^*X_1 & = L_8 \\
A^{-1}L_{20} = & X_2BX_1(AX_2BX_1)^* & = L_{15} & L_{20}X_1^{-1} = & (AX_2BX_1)^*AX_2B & = L_{12} \\
A^{-1}L_{21} = & X_2(BX_1AX_2)^* & = L_{17} & L_{21}X_2^{-1} = & (AX_2BX_1)^*A & = L_{10} \\
B^{-1}L_{22} = & X_1(AX_2BX_1)^* & = L_{11} & L_{22}X_1^{-1} = & (BX_1AX_2)^*B & = L_{16} \\
B^{-1}L_{23} = & X_1AX_2(BX_1AX_2)^* & = L_{13} & L_{23}X_2^{-1} = & (BX_1AX_2)^*BX_1A & = L_{14}
\end{array}$$

Równoważna gramatyka wygląda następująco:

$X_1 \rightarrow bL_0$	$X_1 \rightarrow L_2a + L_3b$
$X_2 \rightarrow aL_1$	$X_2 \rightarrow L_4a + L_5b$
$A \rightarrow aE$	$A \rightarrow Ea$
$B \rightarrow bE$	$B \rightarrow Eb$
$E \rightarrow \epsilon$	$E \rightarrow \epsilon$
$L_0 \rightarrow AL_6 + \epsilon$	$L_0 \rightarrow L_7X_2 + \epsilon$
$L_1 \rightarrow BL_8 + \epsilon$	$L_1 \rightarrow L_9X_1 + \epsilon$
$L_2 \rightarrow X_1L_{10}$	$L_2 \rightarrow L_{11}A$
$L_3 \rightarrow X_1L_{12} + \epsilon$	$L_3 \rightarrow L_{13}B + \epsilon$
$L_4 \rightarrow X_2L_{14} + \epsilon$	$L_4 \rightarrow L_{15}A + \epsilon$
$L_5 \rightarrow X_2L_{16}$	$L_5 \rightarrow L_{17}B$
$L_6 \rightarrow X_2L_0$	$L_6 \rightarrow L_{18}X_2$
$L_7 \rightarrow AL_{18}$	$L_7 \rightarrow L_0A$
$L_8 \rightarrow X_1L_1$	$L_8 \rightarrow L_{19}X_1$
$L_9 \rightarrow BL_{19}$	$L_9 \rightarrow L_1B$
$L_{10} \rightarrow AL_4$	$L_{10} \rightarrow L_{20}A$
$L_{11} \rightarrow X_1L_{20}$	$L_{11} \rightarrow L_3X_1$
$L_{12} \rightarrow AL_5$	$L_{12} \rightarrow L_{21}B$
$L_{13} \rightarrow X_1L_{21}$	$L_{13} \rightarrow L_2X_2$
$L_{14} \rightarrow BL_2$	$L_{14} \rightarrow L_{22}A$
$L_{15} \rightarrow X_2L_{22}$	$L_{15} \rightarrow L_5X_1$
$L_{16} \rightarrow BL_3$	$L_{16} \rightarrow L_{23}B$
$L_{17} \rightarrow X_2L_{23}$	$L_{17} \rightarrow L_4X_2$
$L_{18} \rightarrow X_2L_7 + \epsilon$	$L_{18} \rightarrow L_6A + \epsilon$
$L_{19} \rightarrow X_1L_9 + \epsilon$	$L_{19} \rightarrow L_8B + \epsilon$
$L_{20} \rightarrow AL_{15} + \epsilon$	$L_{20} \rightarrow L_{12}X_1 + \epsilon$
$L_{21} \rightarrow AL_{17}$	$L_{21} \rightarrow L_{10}X_2$
$L_{22} \rightarrow BL_{11}$	$L_{22} \rightarrow L_{16}X_1$
$L_{23} \rightarrow BL_{13} + \epsilon$	$L_{23} \rightarrow L_{14}X_2 + \epsilon$

Zastępując  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $A$  i  $B$  otrzymujemy:

$X_1 \rightarrow bL_0$	$X_1 \rightarrow L_2a + L_3b$
$X_2 \rightarrow aL_1$	$X_2 \rightarrow L_4a + L_5b$
$A \rightarrow aE$	$A \rightarrow Ea$
$B \rightarrow bE$	$B \rightarrow Eb$
$E \rightarrow \epsilon$	$E \rightarrow \epsilon$
$L_0 \rightarrow aEL_6 + \epsilon$	$L_0 \rightarrow L_7L_4a + L_7L_5b + \epsilon$
$L_1 \rightarrow bEL_8 + \epsilon$	$L_1 \rightarrow L_9L_2a + L_9L_3b + \epsilon$
$L_2 \rightarrow bL_0L_{10}$	$L_2 \rightarrow L_{11}Ea$
$L_3 \rightarrow bL_0L_{12} + \epsilon$	$L_3 \rightarrow L_{13}Eb + \epsilon$
$L_4 \rightarrow aL_1L_{14} + \epsilon$	$L_4 \rightarrow L_{15}Ea + \epsilon$
$L_5 \rightarrow aL_1L_{16}$	$L_5 \rightarrow L_{17}Eb$
$L_6 \rightarrow aL_1L_0$	$L_6 \rightarrow L_{18}L_4a + L_{18}L_5b$
$L_7 \rightarrow aEL_{18}$	$L_7 \rightarrow L_0Ea$
$L_8 \rightarrow bL_0L_1$	$L_8 \rightarrow L_{19}L_2a + L_{19}L_3b$
$L_9 \rightarrow bEL_{19}$	$L_9 \rightarrow L_1Eb$
$L_{10} \rightarrow aEL_4$	$L_{10} \rightarrow L_{20}Ea$
$L_{11} \rightarrow bL_0L_{20}$	$L_{11} \rightarrow L_3L_2a + L_3L_3b$
$L_{12} \rightarrow aEL_5$	$L_{12} \rightarrow L_{21}Eb$
$L_{13} \rightarrow bL_0L_{21}$	$L_{13} \rightarrow L_2L_4a + L_2L_5b$
$L_{14} \rightarrow bEL_2$	$L_{14} \rightarrow L_{22}Ea$
$L_{15} \rightarrow aL_1L_{22}$	$L_{15} \rightarrow L_5L_2a + L_5L_3b$
$L_{16} \rightarrow bEL_3$	$L_{16} \rightarrow L_{23}Eb$
$L_{17} \rightarrow aL_1L_{23}$	$L_{17} \rightarrow L_4L_4a + L_4L_5b$
$L_{18} \rightarrow aL_1L_7 + \epsilon$	$L_{18} \rightarrow L_6Ea + \epsilon$
$L_{19} \rightarrow bL_0L_9 + \epsilon$	$L_{19} \rightarrow L_8Eb + \epsilon$
$L_{20} \rightarrow aEL_{15} + \epsilon$	$L_{20} \rightarrow L_{12}L_2a + L_{12}L_3b + \epsilon$
$L_{21} \rightarrow aEL_{17}$	$L_{21} \rightarrow L_{10}L_4a + L_{10}L_5b$
$L_{22} \rightarrow bEL_{11}$	$L_{22} \rightarrow L_{16}L_2a + L_{16}L_3b$
$L_{23} \rightarrow bEL_{13} + \epsilon$	$L_{23} \rightarrow L_{14}L_4a + L_{14}L_5b + \epsilon$

Po usunięciu  $\epsilon$ -produkcji mamy:

$$\begin{array}{ll}
X_1 \rightarrow bL_0 + b & X_1 \rightarrow L_2a + L_3b + b \\
X_2 \rightarrow aL_1 + a & X_2 \rightarrow L_4a + L_5b + a \\
A \rightarrow a & A \rightarrow a \\
B \rightarrow b & B \rightarrow b \\
L_0 \rightarrow aL_6 & L_0 \rightarrow L_7L_4a + L_7a + L_7L_5b \\
L_1 \rightarrow bL_8 & L_1 \rightarrow L_9L_2a + L_9L_3b + L_9b \\
L_2 \rightarrow bL_0L_{10} + bL_{10} & L_2 \rightarrow L_{11}a \\
L_3 \rightarrow bL_0L_{12} + bL_{12} & L_3 \rightarrow L_{13}b \\
L_4 \rightarrow aL_1L_{14} + aL_{14} & L_4 \rightarrow L_{15}a \\
L_5 \rightarrow aL_1L_{16} + aL_{16} & L_5 \rightarrow L_{17}b \\
L_6 \rightarrow aL_1L_0 + aL_1 + aL_0 + a & L_6 \rightarrow L_{18}L_4a + L_{18}a + L_4a + a + L_{18}L_5b + L_5b \\
L_7 \rightarrow aL_{18} + a & L_7 \rightarrow L_0a + a \\
L_8 \rightarrow bL_0L_1 + bL_0 + bL_1 + b & L_8 \rightarrow L_{19}L_2a + L_2a + L_{19}L_3b + L_{19}b + L_3b + b \\
L_9 \rightarrow bL_{19} + b & L_9 \rightarrow L_1b + b \\
L_{10} \rightarrow aL_4 + a & L_{10} \rightarrow L_{20}a + a \\
L_{11} \rightarrow bL_0L_{20} + bL_0 + bL_{20} + b & L_{11} \rightarrow L_3L_2a + L_2a + L_3L_3b + L_3b + b \\
L_{12} \rightarrow aL_5 & L_{12} \rightarrow L_{21}b \\
L_{13} \rightarrow bL_0L_{21} + bL_{21} & L_{13} \rightarrow L_2L_4a + L_2a + L_2L_5b \\
L_{14} \rightarrow bL_2 & L_{14} \rightarrow L_{22}a \\
L_{15} \rightarrow aL_1L_{22} + aL_{22} & L_{15} \rightarrow L_5L_2a + L_5L_3b + L_5b \\
L_{16} \rightarrow bL_3 + b & L_{16} \rightarrow L_{23}b + b \\
L_{17} \rightarrow aL_1L_{23} + aL_1 + aL_{23} + a & L_{17} \rightarrow L_4L_4a + L_4a + a + L_4L_5b + L_5b \\
L_{18} \rightarrow aL_1L_7 + aL_7 & L_{18} \rightarrow L_6a \\
L_{19} \rightarrow bL_0L_9 + bL_9 & L_{19} \rightarrow L_8b \\
L_{20} \rightarrow aL_{15} & L_{20} \rightarrow L_{12}L_2a + L_{12}L_3b + L_{12}b \\
L_{21} \rightarrow aL_{17} & L_{21} \rightarrow L_{10}L_4a + L_{10}a + L_{10}L_5b \\
L_{22} \rightarrow bL_{11} & L_{22} \rightarrow L_{16}L_2a + L_{16}L_3b + L_{16}b \\
L_{23} \rightarrow bL_{13} & L_{23} \rightarrow L_{14}L_4a + L_{14}a + L_{14}L_5b
\end{array}$$

Zastępujemy najbardziej wysunięte na prawo zmienne w lewej gramatyce produkcjami prawej gramatyki, i usuwamy beżużyteczne produkcje dla  $A$  i  $B$ :

$$\begin{aligned}
X_1 &\rightarrow bL_7L_4a + bL_7a + bL_7L_5b + b \\
X_2 &\rightarrow aL_9L_2a + aL_9L_3b + aL_9b + a \\
L_0 &\rightarrow aL_{18}L_4a + aL_{18}a + aL_4a + a + aL_{18}L_5b + aL_5b \\
L_1 &\rightarrow bL_{19}L_2a + bL_2a + bL_{19}L_3b + bL_{19}b + bL_3b + bb \\
L_2 &\rightarrow bL_0L_{20}a + bL_0a + bL_{20}a + ba \\
L_3 &\rightarrow bL_0L_{21}b + bL_{21}b \\
L_4 &\rightarrow aL_1L_{22}a + aL_{22}a \\
L_5 &\rightarrow aL_1L_{23}b + aL_1b + aL_{23}b + ab \\
L_6 &\rightarrow aL_1L_7L_4a + aL_1L_7a + aL_1L_7L_5b + aL_9L_2a + aL_9L_3b + aL_9b + aL_7L_4a + aL_7a + aL_7L_5b + a \\
L_7 &\rightarrow aL_6a + a \\
L_8 &\rightarrow bL_0L_9L_2a + bL_0L_9L_3b + bL_0L_9b + bL_7L_4a + bL_7a + bL_7L_5b + bL_9L_2a + bL_9L_3b + bL_9b + b \\
L_9 &\rightarrow bL_8b + b \\
L_{10} &\rightarrow aL_{15}a + a \\
L_{11} &\rightarrow bL_0L_{12}L_2a + bL_0L_{12}L_3b + bL_0L_3b + bL_7L_4a + bL_7a + bL_7L_5b + bL_{12}L_2a + bL_{12}L_3b + bL_3b + b \\
L_{12} &\rightarrow aL_{17}b \\
L_{13} &\rightarrow bL_0L_{10}L_4a + bL_0L_{10}a + bL_0L_{10}L_5b + bL_{10}L_4a + bL_{10}a + bL_{10}L_5b \\
L_{14} &\rightarrow bL_{11}a \\
L_{15} &\rightarrow aL_1L_{16}L_2a + aL_1L_{16}L_3b + aL_1L_{16}b + aL_{16}L_2a + aL_{16}L_3b + aL_{16}b \\
L_{16} &\rightarrow bL_{13}b + b \\
L_{17} &\rightarrow aL_1L_{14}L_4a + aL_1L_{14}a + aL_1L_{14}L_5b + aL_9L_2a + aL_9L_3b + aL_9b + aL_{14}L_4a + aL_{14}a + aL_{14}L_5b + a \\
L_{18} &\rightarrow aL_1L_0a + aL_1a + aL_0a + aa \\
L_{19} &\rightarrow bL_0L_1b + bL_0b + bL_1b + bb \\
L_{20} &\rightarrow aL_5L_2a + aL_5L_3b + aL_5b \\
L_{21} &\rightarrow aL_4L_4a + aL_4a + aa + aL_4L_5b + aL_5b \\
L_{22} &\rightarrow bL_3L_2a + bL_2a + bL_3L_3b + bL_3b + bb \\
L_{23} &\rightarrow bL_2L_4a + bL_2a + bL_2L_5b
\end{aligned}$$

#### Przykład 4.2 - poprawka artykułu [2]

Rozważamy gramatykę będącą w słabej postaci normalnej Chomsky'ego:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow SXSS + b \\
X &\rightarrow a
\end{aligned}$$

Rozpatrzmy rodziny  $\mathcal{L}$  i  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{aligned}
L(a, S) &= \emptyset & L(b, S) &= (XSS)^* = L_0 \\
L(a, X) &= \{\epsilon\} = E & L(b, X) &= \emptyset \\
R(a, S) &= \emptyset & R(b, S) &= (SXS)^* = L_1 \\
R(a, X) &= \{\epsilon\} = E & R(b, X) &= \emptyset \\
\mathcal{L} &= \{\emptyset, L_0, E\} & \mathcal{R} &= \{\emptyset, L_1, E\}
\end{aligned}$$

Obliczmy domknięcie  $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$  względem lewostronnego oraz prawostronnego ilorazu.

$$\begin{aligned}
X^{-1}L_0 &= SS(XSS)^* = L_2 & L_0S^{-1} &= (XSS)^*XS = L_3 \\
S^{-1}L_1 &= XS(SXS)^* = L_3 & L_1S^{-1} &= (SXS)^*SX = L_4 \\
S^{-1}L_2 &= S(XSS)^* = L_5 & L_2S^{-1} &= (SSX)^*S = L_6 \\
X^{-1}L_3 &= S(SXS)^* = L_6 & L_3S^{-1} &= (XSS)^*X = L_7 \\
S^{-1}L_4 &= X(SSX)^* = L_7 & L_4X^{-1} &= (SXS)^*S = L_5 \\
S^{-1}L_5 &= (XSS)^* = L_0 & L_5S^{-1} &= (SXS)^* = L_1 \\
S^{-1}L_6 &= (SXS)^* = L_1 & L_6S^{-1} &= (SSX)^* = L_8 \\
X^{-1}L_7 &= (SSX)^* = L_8 & L_7X^{-1} &= (XSS)^* = L_0 \\
S^{-1}L_8 &= SX(SSX)^* = L_4 & L_8X^{-1} &= (SSX)^*SS = L_2
\end{aligned}$$

Równoważne gramatyki wyglądają następująco:

$$\begin{array}{ll}
S \rightarrow bL_0 + bE & S \rightarrow L_1b + Eb \\
X \rightarrow aE & X \rightarrow Ea \\
L_0 \rightarrow XL_2 + \epsilon & L_0 \rightarrow L_3S + \epsilon \\
L_1 \rightarrow SL_3 + \epsilon & L_1 \rightarrow L_4S + \epsilon \\
L_2 \rightarrow SL_5 & L_2 \rightarrow L_6S \\
L_3 \rightarrow XL_6 & L_3 \rightarrow L_7S \\
L_4 \rightarrow SL_7 & L_4 \rightarrow L_5X \\
L_5 \rightarrow SL_0 & L_5 \rightarrow L_1S \\
L_6 \rightarrow SL_1 & L_6 \rightarrow L_8S \\
L_7 \rightarrow XL_8 & L_7 \rightarrow L_0X \\
L_8 \rightarrow SL_4 + \epsilon & L_8 \rightarrow L_2X + \epsilon \\
E \rightarrow \epsilon & E \rightarrow \epsilon
\end{array}$$

Zastępując  $X$  przez  $aE$  i  $S$  przez  $bL_0 + bE$  w lewej gramatyce oraz  $X$  przez  $Ea$  i  $S$  przez  $L_1b + Eb$  w prawej gramatyce otrzymujemy:

$$\begin{array}{ll}
S \rightarrow bL_0 + bE & S \rightarrow L_1b + Eb \\
X \rightarrow aE & X \rightarrow Ea \\
L_0 \rightarrow aEL_2 + \epsilon & L_0 \rightarrow L_3L_1b + L_3Eb + \epsilon \\
L_1 \rightarrow bL_0L_3 + bEL_3 + \epsilon & L_1 \rightarrow L_4L_1b + L_4Eb + \epsilon \\
L_2 \rightarrow bL_0L_5 + bEL_5 & L_2 \rightarrow L_6L_1b + L_6Eb \\
L_3 \rightarrow aEL_6 & L_3 \rightarrow L_7L_1b + L_7Eb \\
L_4 \rightarrow bL_0L_7 + bEL_7 & L_4 \rightarrow L_5Ea \\
L_5 \rightarrow bL_0L_0 + bEL_0 & L_5 \rightarrow L_1L_1b + L_1Eb \\
L_6 \rightarrow bL_0L_1 + bEL_1 & L_6 \rightarrow L_8L_1b + L_8Eb \\
L_7 \rightarrow aEL_8 & L_7 \rightarrow L_0Ea \\
L_8 \rightarrow bL_0L_4 + bEL_4 + \epsilon & L_8 \rightarrow L_2Ea + \epsilon \\
E \rightarrow \epsilon & E \rightarrow \epsilon
\end{array}$$

Po usunięciu  $\epsilon$ -produkcji mamy:

$$\begin{array}{ll}
S \rightarrow bL_0 + b & S \rightarrow L_1b + b \\
X \rightarrow a & X \rightarrow a \\
L_0 \rightarrow aL_2 & L_0 \rightarrow L_3L_1b + L_3b \\
L_1 \rightarrow bL_0L_3 + bL_3 & L_1 \rightarrow L_4L_1b + L_4b \\
L_2 \rightarrow bL_0L_5 + bL_5 & L_2 \rightarrow L_6L_1b + L_6b \\
L_3 \rightarrow aL_6 & L_3 \rightarrow L_7L_1b + L_7b \\
L_4 \rightarrow bL_0L_7 + bL_7 & L_4 \rightarrow L_5a \\
L_5 \rightarrow bL_0L_0 + bL_0 + b & L_5 \rightarrow L_1L_1b + L_1b + b \\
L_6 \rightarrow bL_0L_1 + bL_0 + bL_1 + b & L_6 \rightarrow L_8L_1b + L_8b + L_1b + b \\
L_7 \rightarrow aL_8 + a & L_7 \rightarrow L_0a + a \\
L_8 \rightarrow bL_0L_4 + bL_4 & L_8 \rightarrow L_2a
\end{array}$$

Otrzymujemy gramatykę w sześcienniej podwójnej postaci normalnej Greibach.

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow bL_3L_1b + bL_3b + b \\
X &\rightarrow a \\
L_0 &\rightarrow aL_6L_1b + aL_6b \\
L_1 &\rightarrow bL_0L_7L_1b + bL_0L_7b + bL_7L_1b + bL_7b \\
L_2 &\rightarrow bL_0L_1L_1b + bL_0L_1b + bL_0b + bL_1L_1b + bL_1b + bb \\
L_3 &\rightarrow aL_8L_1b + aL_8b + aL_1b + ab \\
L_4 &\rightarrow bL_0L_0a + bL_0a + ba \\
L_5 &\rightarrow bL_0L_3L_1b + bL_0L_3b + bL_3L_1b + bL_3b + b \\
L_6 &\rightarrow bL_0L_4L_1b + bL_0L_4b + bL_3L_1b + bL_3b + bL_4L_1b + bL_4b + b \\
L_7 &\rightarrow aL_2a + a \\
L_8 &\rightarrow bL_0L_5a + bL_5a
\end{aligned}$$

Wprowadzamy nowe nieterminale oraz produkcje celem sprowadzenia gramatyki do kwadratowej podwójnej postaci normalnej Greibach.

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow bL_3L_1b + bL_3b + b \\
X &\rightarrow a \\
L_0 &\rightarrow aL_6L_1b + aL_6b \\
L_1 &\rightarrow b\langle L_0L_7 \rangle L_1b + bL_0L_7b + bL_7L_1b + bL_7b \\
L_2 &\rightarrow b\langle L_0L_1 \rangle L_1b + bL_0L_1b + bL_0b + bL_1L_1b + bL_1b + bb \\
L_3 &\rightarrow aL_8L_1b + aL_8b + aL_1b + ab \\
L_4 &\rightarrow bL_0L_0a + bL_0a + ba \\
L_5 &\rightarrow b\langle L_0L_3 \rangle L_1b + bL_0L_3b + bL_3L_1b + bL_3b + b \\
L_6 &\rightarrow b\langle L_0L_4 \rangle L_1b + bL_0L_4b + bL_3L_1b + bL_3b + bL_4L_1b + bL_4b + b \\
L_7 &\rightarrow aL_2a + a \\
L_8 &\rightarrow bL_0L_5a + bL_5a \\
\langle L_0L_1 \rangle &\rightarrow aL_2\langle L_4L_1 \rangle b + aL_2L_4b \\
\langle L_0L_3 \rangle &\rightarrow a\langle L_2L_7 \rangle L_1b + aL_2L_7b \\
\langle L_0L_4 \rangle &\rightarrow aL_2L_5a \\
\langle L_0L_7 \rangle &\rightarrow aL_2L_0a + aL_2a \\
\langle L_2L_7 \rangle &\rightarrow b\langle L_0L_5 \rangle L_0a + bL_0L_5a + bL_5L_0a + bL_5a \\
\langle L_0L_5 \rangle &\rightarrow a\langle L_2L_1 \rangle L_1b + aL_2L_1b + aL_2b \\
\langle L_2L_1 \rangle &\rightarrow b\langle L_0L_5 \rangle \langle L_4L_1 \rangle b + b\langle L_0L_5 \rangle L_4b + bL_5\langle L_4L_1 \rangle b + bL_5L_4b \\
\langle L_4L_1 \rangle &\rightarrow b\langle L_0L_7 \rangle \langle L_4L_1 \rangle b + b\langle L_0L_7 \rangle L_4b + bL_7\langle L_4L_1 \rangle b + bL_7L_4b
\end{aligned}$$

## 5 Metoda Bluma-Kocha

W metodzie Bluma-Kocha zakłada się, że symbol początkowy gramatyki nie występuje po prawej stronie żadnej produkcji. Warunek ten łatwo spełnić w dowolnej gramatyce wprowadzając w razie potrzeby nowy symbol początkowy gramatyki oraz produkcję  $S' \rightarrow S$ , gdzie  $S$  jest poprzednim symbolem początkowym gramatyki. Warunek ten będziemy nazywać warunkiem Bluma-Kocha.

Wynikiem działania algorytmu jest gramatyka w tzw. postaci normalnej z nagłówkami terminalnymi (ang. normal form with terminal heads). Podobnie jak to czyniliśmy przy okazji metody Rosenkrantz'a, gramatykę taką można prosto sprowadzić do postaci normalnej Greibach wprowadzając nowe zmienne pomocnicze  $C_a$  dla każdego terminala  $a \in T$  oraz produkcje postaci  $C_a \rightarrow a$  i zamieniając każdy nie skrajnie lewy terminal  $a$  występujący w prawych stronach produkcji przez nieterminal  $C_a$ .

Algorytm powoduje zwiększenie rozmiaru gramatyki rzędu  $O(|G|^3)$ , gdy gramatyka nie zawiera produkcji łańcuchowych oraz rzędu  $O(|G|^4)$ , gdy gramatyka zawiera produkcje łańcuchowe.

### 5.1 Sprowadzanie gramatyki do postaci normalnej Greibach

Algorytm.

1. Dla każdego nieterminala  $B \in N - \{S\}$  utwórz gramatykę  $G_B = \langle N_B, N \cup T, P_B, S_B \rangle$  gdzie  $N_B = \{A_B \mid A \in N\} \cup N$ .  
Zauważmy, że w gramatyce  $G_B$  zbiorem terminali jest zbiór terminali i nieterminali gramatyki  $G$ . Niech  $N(A)$  oznacza zbiór nieterminali otrzymanych z  $A$  przy użyciu produkcji łańcuchowych. t.j.  $N(A) = \{C \in N \mid A \Rightarrow^* C\}$ . Produkcje  $P_B$  do gramatyki  $G_B$  dodawane są następująco:

Dodawane produkcje	Warunek
$S_B \rightarrow a\gamma$	$C \rightarrow a\gamma \in P, C \in N(B), a \in T, \gamma \in (N \cup T)^*$
$S_B \rightarrow a\gamma C_B$	$C \rightarrow a\gamma \in P, a \in T, \gamma \in (N \cup T)^*$
$C_B \rightarrow \alpha D_B$	$D \rightarrow C\alpha \in P, D \in N - \{S\}, C \in N, \alpha \in (N \cup T)^*$
$C_B \rightarrow \alpha$	$D \rightarrow C\alpha \in P, D \in N(B), C \in N, \alpha \in (N \cup T)^+$

Dodaj  $P_B$  do  $P$ .

2. Dla dowolnych symboli nieterminalnych  $B, E \in N - \{S\}$ 
  - każdą produkcję  $A \rightarrow B\alpha$  zastąp przez  $A \rightarrow S_B\alpha$
  - każdą produkcję  $A_E \rightarrow B\alpha$  zastąp przez  $A_E \rightarrow S_B\alpha$
3. Dla dowolnych symboli nieterminalnych  $B, E \in N - \{S\}$ 
  - każdą produkcję  $A \rightarrow S_B\alpha$  zastąp przez  $\{A \rightarrow a\gamma\alpha \mid S_B \rightarrow a\gamma \in P_B\}$
  - każdą produkcję  $A_E \rightarrow S_B\alpha$  zastąp przez  $\{A_E \rightarrow a\gamma\alpha \mid S_B \rightarrow a\gamma \in P_B\}$
4. Dla każdego nieterminala  $B \in N - \{S\}$  usuń  $\{S_B \rightarrow \alpha \mid S_B \rightarrow \alpha \in P_B\}$  ze zbioru produkcji  $P$ .
5. Jeżeli w gramatyce istnieją produkcje łańcuchowe postaci  $D_E \rightarrow C_E$  to należy je wyeliminować w standardowy sposób.

**Przykład 5.1** Rozważmy gramatykę

$$\begin{aligned} X &\rightarrow XaY \mid b \\ Y &\rightarrow YbX \mid a \end{aligned}$$

Wprowadzając nowy symbol początkowy  $S$  tworzymy gramatykę rozszerzoną  $G = \langle \{S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S \rangle$ , gdzie  $P$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow X \\ X &\rightarrow XaY \mid b \\ Y &\rightarrow YbX \mid a \end{aligned}$$

Zgodnie z punktem 1. algorytmu tworzymy nowe gramatyki:

Gramatyka  $G_X = \langle \{S_X, X_X, Y_X\}, \{a, b, S, X, Y\}, P_X, S_X \rangle$ :

$$\begin{aligned} S_X &\rightarrow b \mid bX_X \mid aY_X \\ X_X &\rightarrow aY \mid aYX_X \\ Y_X &\rightarrow bXY_X \end{aligned}$$

Gramatyka  $G_Y = \langle \{S_Y, X_Y, Y_Y\}, \{a, b, S, X, Y\}, P_Y, S_Y \rangle$ :

$$\begin{aligned} S_Y &\rightarrow a \mid aY_Y \mid bX_Y \\ X_Y &\rightarrow aYX_Y \\ Y_Y &\rightarrow bX \mid bXY_Y \end{aligned}$$

Choć nie jest to zaznaczone w algorytmie warto w tej fazie pozbyć się symboli nieużytecznych (tj. nieterminali  $Y_X, X_Y$ ). Po ich usunięciu otrzymujemy:

Gramatyka  $G_X$ :

$$\begin{aligned} S_X &\rightarrow b \mid bX_X \\ X_X &\rightarrow aY \mid aYX_X \end{aligned}$$

Gramatyka  $G_Y$ :

$$\begin{aligned} S_Y &\rightarrow a \mid aY_Y \\ Y_Y &\rightarrow bX \mid bXY_Y \end{aligned}$$

Gramatyki  $G_X$  i  $G_Y$  generują odpowiednio języki  $L_X = \{b(aY)^k \mid k \geq 0\}$  oraz  $L_Y = \{a(bX)^k \mid k \geq 0\}$ , co zgadza się z przedstawioną definicją tych gramatyk.

Po dodaniu produkcji gramatyk  $G_X$  i  $G_Y$  gramatyka  $G$  ma postać:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow X \\ X &\rightarrow XaY \mid b \\ Y &\rightarrow YbX \mid a \\ S_X &\rightarrow b \mid bX_X \\ X_X &\rightarrow aY \mid aYX_X \\ S_Y &\rightarrow a \mid aY_Y \\ Y_Y &\rightarrow bX \mid bXY_Y \end{aligned}$$

W kroku 2. zastępujemy produkcje:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow X \\ X &\rightarrow XaY \\ Y &\rightarrow YbX \end{aligned}$$

przez

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S_X \\ X &\rightarrow S_XaY \\ Y &\rightarrow S_YbX \end{aligned}$$

a z kolei w kroku 3. powyższe produkcje zastępujemy przez

$$\begin{aligned} S &\rightarrow b \mid bX_X \\ X &\rightarrow baY \mid bX_XaY \\ Y &\rightarrow abX \mid aY_YbX \end{aligned}$$

Wszystkie produkcje zaczynające się nieterminalami  $S_X$  i  $S_Y$  po lewej stronie są usuwane.

Ostatecznie otrzymujemy gramatykę w postaci normalnej z prawymi stronami zaczynającymi się od terminali:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow b \mid bX_X \\ X &\rightarrow b \mid baY \mid bX_XaY \\ Y &\rightarrow a \mid abX \mid aY_YbX \\ X_X &\rightarrow aY \mid aYX_X \\ Y_Y &\rightarrow bX \mid bXY_Y \end{aligned}$$

Gramatyka nie zawiera produkcji łańcuchowych, i łatwo otrzymać z niej postać normalną Greibach.

**Przykład 5.2** Rozważmy gramatykę

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SXSS \mid b \\ X &\rightarrow a \end{aligned}$$

Wprowadzamy nowy symbol początkowy  $S'$  celem spełnienia warunku Bluma-Kocha. Otrzymujemy gramatykę  $G = \langle \{S', S, X\}, \{a, b\}, P, S' \rangle$  gdzie  $P$ :

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow SXSS \mid b \\ X &\rightarrow a \end{aligned}$$

Tworzymy gramatyki  $G_S$  i  $G_X$ .

Gramatyka  $G_S = \langle \{S'_S, S_S, X_S\}, \{S', S, X, a, b\}, P_S, S'_S \rangle$ :

$$\begin{aligned} S'_S &\rightarrow b \mid bS_S \mid aX_S \\ S_S &\rightarrow X_S S_S \mid X_S S_S S_S \end{aligned}$$

Gramatyka  $G_X = \langle \{S'_X, S_X, X_X\}, \{S', S, X, a, b\}, P_X, S'_X \rangle$ :

$$\begin{aligned} S'_X &\rightarrow a \mid aX_X \mid bS_X \\ S_X &\rightarrow XSSX \end{aligned}$$

Modyfikujemy gramatyki  $G_S, G_X$  usuwając symbole bezużyteczne:

Gramatyka  $G_S$ :

$$\begin{aligned} S'_S &\rightarrow b \mid bS_S \\ S_S &\rightarrow XSS \mid XSSS_S \end{aligned}$$

Gramatyka  $G_X$ :

$$S'_X \rightarrow a$$

Gramatyka  $G$  ma na tym etapie postać:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow SXSS \mid b \\ X &\rightarrow a \\ S'_S &\rightarrow b \mid bS_S \\ S_S &\rightarrow XSS \mid XSSS_S \\ S'_X &\rightarrow a \end{aligned}$$

Dokonujemy zastąpień wg 2. i 3. kroku algorytmu:

Usuwana produkcja	I zastąpienie	II zastąpienie
$S' \rightarrow S$	$S' \rightarrow S'_S$	$S' \rightarrow b \mid bS_S$
$S \rightarrow SXSS$	$S \rightarrow S'_S XSS$	$S \rightarrow bXSS \mid bS_S XSS$
$S_S \rightarrow XSSS_S$	$S_S \rightarrow S'_X XSS_S$	$S_S \rightarrow aSSS_S$
$S_S \rightarrow XSS$	$S_S \rightarrow S'_X SS$	$S_S \rightarrow aSS$

Po usunięciu produkcji typu  $S'_B \rightarrow \alpha, B \in N - \{S'\}$  dostajemy:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow b \mid bS_S \\ S &\rightarrow b \mid bXSS \mid bS_S XSS \\ S_S &\rightarrow aSS \mid aSSS_S \\ X &\rightarrow a \end{aligned}$$

Otrzymana gramatyka nie zawiera żadnych produkcji łańcuchowych i łatwo już otrzymać z niej postać normalną Greibach.

## 5.2 Sprowadzanie gramatyki do kwadratowej postaci normalnej Greibach (2-GNF)

Podobnie jak poprzednia konstrukcja algorytm bazuje na konstrukcji języków typu  $L_B$  dla  $B \in N - \{S\}$ . Są to języki słów  $x \in T(N - \{S\})$  w alfabecie terminali i nieterminali  $N \cup T$ .

W odróżnieniu od podstawowej wersji algorytmu Bluma-Kocha algorytm sprowadzania do postaci kwadratowej 2-GNF wymaga na wejściu gramatyki w postaci normalnej Chomsky'ego oraz bazuje na konstrukcjach automatów skończonych opisujących języki  $L_B$  oraz  $L_B^R$ . Powoduje on wzrost rozmiaru gramatyki rzędu  $O(|G|^3)$ .

Istnieją pewne modyfikacje opisywanego algorytmu, w których konstrukcja gramatyki w postaci normalnej Greibach przebiega poprzez gramatykę w rozszerzonej postaci normalnej Chomsky'ego oraz rozszerzonej postaci normalnej Greibach (dopuszczalne są produkcje łańcuchowe). Wtedy cała konstrukcja powoduje wzrost rozmiaru gramatyki rzędu  $O(|G|^4)$ . Gdyby zaś konstrukcja przebiegała torem  $G \rightarrow$

gramatyka w postaci Chomsky'ego  $\longrightarrow$  gramatyka w postaci Greibach (a więc bez produkcji łańcuchowych), powodowałaby wzrost rozmiaru gramatyki rzędu  $O(|G|^6)$ .

Poniżej omawiana jest podstawowa metoda, od gramatyki w postaci normalnej Chomsky'ego do gramatyki w postaci normalnej Greibach.

Algorytm.

1. Dla każdego  $B \in N - \{S\}$  skonstruuj automat  $M_B = (Q, V, \delta, B_B, \mathcal{S}_B)$  opisujący język  $L_B^R = L(M_B)$ , gdzie:

$$Q_B = \{A_B \mid A \in N\} \cup \{\mathcal{S}_B\}$$

$$\delta(C_B, E) = \{D_B \mid C \rightarrow DE \in P\}$$

$$\delta(C_B, a) = \begin{cases} \{\mathcal{S}_B\} & \text{jeśli } C \rightarrow a \in P \\ \emptyset & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

dla każdego  $C_B \in Q, E \in N - \{S\}, a \in T$

Należy podkreślić różnicę między stanem  $S_B$  a stanem  $\mathcal{S}_B$ . W przykładach zostanie pokazane, że niepotrzebne jest branie pod uwagę stanu  $S_B$ , gdyż nie jest on wykorzystywany do późniejszych konstrukcji gramatyk  $G_B$ .

2. Dla każdego  $B \in N - \{S\}$  skonstruuj automat  $M'_B = (Q, V, \delta', \mathcal{S}_B, B_B)$  opisujący język  $L_B = L(M'_B)$ , gdzie:

$$Q_B = \{A_B \mid A \in N\} \cup \{\mathcal{S}_B\}$$

$$\delta'(\mathcal{S}_B, a) = \{C_B \mid \{\mathcal{S}_B\} = \delta(C_B, a)\}$$

$$\delta'(D_B, E) = \{C_B \mid D_B \in \delta(C_B, E)\}$$

dla każdego  $D_B \in Q, E \in N - \{S\}, a \in T$

Przy konstruowaniu automatu  $M'_B$  korzystamy z faktu, że aby z języka  $L_B^R$  otrzymać  $L_B$  wystarczy w automacie  $M_B$  odwrócić wszystkie przejścia, zamienić stan końcowy automatu  $M_B$  na początkowy w  $M'_B$ , zaś początkowy w  $M_B$  na końcowy w  $M'_B$ .

3. Dla każdego  $B \in N - \{S\}$  zdefiniuj gramatykę  $G'_B = \langle V_B, V, P'_B, \mathcal{S}_B \rangle$  gdzie  $V_B = \{A_B \mid A \in N - \{S\}\} \cup \{\mathcal{S}_B\} \cup V$ .

Produkcje  $P'_B$  do gramatyki  $G'_B$  dodawane są następująco:

Dodawane produkcje	Warunek
$\mathcal{S}_B \rightarrow aC_B$	$C_B \in \delta'(\mathcal{S}_B, a)$ oraz $C_B \neq B_B$ lub $\delta'(\{B_B\} \times N - \{S\}) \neq \emptyset$
$\mathcal{S}_B \rightarrow a$	$B_B \in \delta'(\mathcal{S}_B, a)$
$D_B \rightarrow EC_B$	$C_B \in \delta'(D_B, E)$ oraz $C_B \neq B_B$ lub $\delta'(\{B_B\} \times N - \{S\}) \neq \emptyset$
$D_B \rightarrow E$	$B_B \in \delta'(D_B, E)$

dla każdego  $D_B \in V'_B, E \in N - \{S\}, a \in \Sigma$ , gdzie podobno?  $V'_B = V_B - V, V = N \cup T$

Następnie dla każdego  $B \in N - \{S\}$  z gramatyki  $G'_B$  usuń symbole nieużyteczne.

4. Dla każdego  $B \in N - \{S\}$  skonstruuj gramatykę  $G_B = \langle V_B, T, P_B, \mathcal{S}_B \rangle$ .

Produkcje  $P_B$  do gramatyki  $G_B$  dodawane są następująco:

Dodawane produkcje	Warunek
$\mathcal{S}_B \rightarrow aC_B$	$\mathcal{S}_B \rightarrow aC_B \in P'_B$
$\mathcal{S}_B \rightarrow a$	$\mathcal{S}_B \rightarrow a \in P'_B$
$D_B \rightarrow \alpha C_B$	$D_B \rightarrow EC_B \in P'_B, \alpha$ jest alternatywą $\mathcal{S}_E$ w $G'_E$
$D_B \rightarrow \alpha$	$D_B \rightarrow E \in P'_B, \alpha$ jest alternatywą $\mathcal{S}_E$ w $G'_E$

5. Skonstruuj gramatykę  $G' = \langle V', T, P', S \rangle$  gdzie  $V' = V \cup \{N_B \mid N - \{S\}\}$ .

Produkcje do gramatyki  $G'$  dodawane są następująco:

Dodawane produkcje	Warunek
$A \rightarrow a$	$A \rightarrow a \in P$
$A \rightarrow a\gamma C$	$A \rightarrow BC \in P$ , $a\gamma$ jest alternatywą $S_B$ w $G_B$
$\bigcup_{B \in N - \{S\}} P_B - \{S_B \rightarrow \alpha \mid \alpha \in TN_B^*\}$	

**Przykład 5.3** Ponownie rozważmy gramatykę:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SXSS \mid b \\ X &\rightarrow a \end{aligned}$$

Celem spełnienia warunku Bluma-Kocha wprowadzamy nowy symbol początkowy  $S'$ :

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow SXSS \mid b \\ X &\rightarrow a \end{aligned}$$

Następnie przekształcamy gramatykę do postaci normalnej Chomsky'ego:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow SA \mid b \\ S &\rightarrow SA \mid b \\ A &\rightarrow XB \\ B &\rightarrow SS \\ X &\rightarrow a \end{aligned}$$

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} Q_S &= \{S'_S, A_S, B_S, X_S, S_S, S'_S\} \\ Q_A &= \{S'_A, A_A, B_A, X_A, S_A, S'_A\} \\ Q_B &= \{S'_B, A_B, B_B, X_B, S_B, S'_B\} \\ Q_X &= \{S'_X, A_X, B_X, X_X, S_X, S'_X\} \end{aligned}$$

Konstruujemy automaty  $M_B$ ,  $B \in N - \{S'\}$ :

$M_S = (Q_S, V, \delta_S, S_S, S'_S)$	$M_A = (Q_A, V, \delta_A, A_A, S'_A)$	$M_B = (Q_B, V, \delta_B, B_B, S'_B)$	$M_X = (Q_X, V, \delta_X, X_X, S'_X)$
$\delta(S'_S, A) = S_S$	$\delta(S'_A, A) = S_A$	$\delta(S'_B, A) = S_B$	$\delta(S'_X, A) = S_X$
$\delta(S_S, A) = S_S$	$\delta(S_A, A) = S_A$	$\delta(S_B, A) = S_B$	$\delta(S_X, A) = S_X$
$\delta(A_S, B) = X_S$	$\delta(A_A, B) = X_A$	$\delta(A_B, B) = X_B$	$\delta(A_X, B) = X_X$
$\delta(B_S, S) = S_S$	$\delta(B_A, S) = S_A$	$\delta(B_B, S) = S_B$	$\delta(B_X, S) = S_X$
$\delta(S'_S, b) = S'_S$	$\delta(S'_A, b) = S'_A$	$\delta(S'_B, b) = S'_B$	$\delta(S'_X, b) = S'_X$
$\delta(S_S, b) = S'_S$	$\delta(S_A, b) = S'_A$	$\delta(S_B, b) = S'_B$	$\delta(S_X, b) = S'_X$
$\delta(X_S, a) = S'_S$	$\delta(X_A, a) = S'_A$	$\delta(X_B, a) = S'_B$	$\delta(X_X, a) = S'_X$

oraz automaty  $M'_B$ ,  $B \in N - \{S'\}$ :

$M'_S = (Q_S, V, \delta'_S, S'_S, S_S)$	$M'_A = (Q_A, V, \delta'_A, S'_A, A_A)$	$M'_B = (Q_B, V, \delta'_B, S'_B, B_B)$	$M'_X = (Q_X, V, \delta'_X, S'_X, X_X)$
$\delta'(S_S, A) = \{S'_S, S_S\}$	$\delta'(S_A, A) = \{S'_A, S_A\}$	$\delta'(S_B, A) = \{S'_B, S_B\}$	$\delta'(S_X, A) = \{S'_X, S_X\}$
$\delta'(X_S, B) = A_S$	$\delta'(X_A, B) = A_A$	$\delta'(X_B, B) = A_B$	$\delta'(X_X, B) = A_X$
$\delta'(S_S, S) = B_S$	$\delta'(S_A, S) = B_A$	$\delta'(S_B, S) = B_B$	$\delta'(S_X, S) = B_X$
$\delta'(S'_S, b) = \{S'_S, S_S\}$	$\delta'(S'_A, b) = \{S'_A, S_A\}$	$\delta'(S'_B, b) = \{S'_B, S_B\}$	$\delta'(S'_X, b) = \{S'_X, S_X\}$
$\delta'(S'_S, a) = X_S$	$\delta'(S'_A, a) = X_A$	$\delta'(S'_B, a) = X_B$	$\delta'(S'_X, a) = X_X$

Powyższe automaty służą do skonstruowania następujących gramatyk:

Gramatyka $G'_S$ :	Gramatyka $G'_A$ :	Gramatyka $G'_B$ :	Gramatyka $G'_X$ :
$S'_S \rightarrow bS_S \mid aX_S \mid b$ $S_S \rightarrow AS_S \mid SB_S \mid A$ $X_S \rightarrow BA_S$	$S'_A \rightarrow bS_A \mid aX_A$ $S_A \rightarrow AS_A \mid SB_A$ $X_A \rightarrow B$	$S'_B \rightarrow bS_B \mid aX_B$ $S_B \rightarrow AS_B \mid S$ $X_B \rightarrow BA_B$	$S'_X \rightarrow bS_X \mid aX_X \mid a$ $S_X \rightarrow AS_X \mid SB_X$ $X_X \rightarrow BA_X$
Po usunięciu symboli nieużytecznych:			
$S'_S \rightarrow bS_S \mid b$ $S_S \rightarrow AS_S \mid A$	$S'_A \rightarrow aX_A$ $X_A \rightarrow B$	$S'_B \rightarrow bS_B$ $S_B \rightarrow AS_B \mid S$	$S'_X \rightarrow a$
$L(G'_S) = \{bA^k \mid k \geq 0\}$	$L(G'_A) = \{aB\}$	$L(G'_B) = \{bA^kY \mid k \geq 0\}$	$L(G'_X) = \{a\}$

Gramatyka  $G_S$ :

$S'_S \rightarrow bS_S \mid b$   
 $S_S \rightarrow aX_AS_S \mid aX_A$

Gramatyka  $G_A$ :

$S'_A \rightarrow aX_A$   
 $X_A \rightarrow bS_B$

Gramatyka  $G_B$ :

$S'_B \rightarrow bS_B$   
 $S_B \rightarrow aX_AS_B \mid bS_S \mid b$

Gramatyka  $G_X$ :

$S'_X \rightarrow a$

Gramatyka  $G'$ :

$S' \rightarrow b$   
 $S \rightarrow b$   
 $X \rightarrow a$   
 $S' \rightarrow bS_SA \mid bA$   
 $S \rightarrow bS_SA \mid bA$   
 $A \rightarrow aB$   
 $B \rightarrow bS_SS \mid bS$   
 $S_S \rightarrow aX_AS_S$   
 $S_S \rightarrow aX_A$   
 $X_A \rightarrow bS_B$   
 $S_B \rightarrow aX_AS_B$   
 $S_B \rightarrow bS_S \mid b$

Po usunięciu symboli bezużytecznych i nieosiągalnych dostajemy gramatykę zawierającą zbiór nieterminali  $N = \{S', S, A, B, S_S, S_B, X_A\}$  i produkcje:

$S' \rightarrow b \mid bA \mid bS_SA$   
 $S \rightarrow b \mid bA \mid bS_SA$   
 $A \rightarrow aB$   
 $B \rightarrow bS \mid bS_SS$   
 $S_S \rightarrow aX_A \mid aX_AS_S$   
 $X_A \rightarrow bS_B$   
 $S_B \rightarrow b \mid bS_S \mid aX_AS_B$

**Przykład 5.4** Rozważmy gramatykę

$$X \rightarrow XaY \mid b$$

$$Y \rightarrow YbX \mid a$$

Tak jak w poprzednim przykładzie wprowadzamy nowy symbol początkowy  $S$ :

$$S \rightarrow X$$

$$X \rightarrow XaY \mid b$$

$$Y \rightarrow YbX \mid a$$

a następnie przekształcamy gramatykę do postaci normalnej Chomsky'ego:

$$S \rightarrow XC \mid b$$

$$X \rightarrow XC \mid b$$

$$C \rightarrow AY$$

$$Y \rightarrow YD \mid a$$

$$D \rightarrow BX$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow b$$

Krok 1. Konstruujemy automaty  $M_B$ ,  $B \in N - \{S'\}$ .

Oznaczmy:

$$Q_X = \{S_X, A_X, B_X, C_X, D_X, X_X, Y_X, S_X\}$$

$$Q_A = \{S_A, A_A, B_A, C_A, D_A, X_A, Y_A, S_A\}$$

$$Q_B = \{S_B, A_B, B_B, C_B, D_B, X_B, Y_B, S_B\}$$

$$Q_C = \{S_C, A_C, B_C, C_C, D_C, X_C, Y_C, S_C\}$$

$$Q_D = \{S_D, A_D, B_D, C_D, D_D, X_D, Y_D, S_D\}$$

$$Q_Y = \{S_Y, A_Y, B_Y, C_Y, D_Y, X_Y, Y_Y, S_Y\}$$

$M_X = (Q_X, N \cup T, \delta_X, X_X, S_X)$	$M_A = (Q_A, N \cup T, \delta_A, A_A, S_A)$	$M_B = (Q_B, N \cup T, \delta_B, B_B, S_B)$
$\delta(A_X, a) = \{S_X\}$	$\delta(A_A, a) = \{S_A\}$	$\delta(A_B, a) = \{S_B\}$
$\delta(B_X, b) = \{S_X\}$	$\delta(B_A, b) = \{S_A\}$	$\delta(B_B, b) = \{S_B\}$
$\delta(C_X, Y) = \{A_X\}$	$\delta(C_A, Y) = \{A_A\}$	$\delta(C_B, Y) = \{A_B\}$
$\delta(D_X, X) = \{B_X\}$	$\delta(D_A, X) = \{B_A\}$	$\delta(D_B, X) = \{B_B\}$
$\delta(X_X, b) = \{S_X\}$	$\delta(X_A, b) = \{S_A\}$	$\delta(X_B, b) = \{S_B\}$
$\delta(X_X, C) = \{X_X\}$	$\delta(X_A, C) = \{X_A\}$	$\delta(X_B, C) = \{X_B\}$
$\delta(Y_X, a) = \{S_X\}$	$\delta(Y_A, a) = \{S_A\}$	$\delta(Y_B, a) = \{S_B\}$
$\delta(Y_X, D) = \{Y_X\}$	$\delta(Y_A, D) = \{Y_A\}$	$\delta(Y_B, D) = \{Y_B\}$
$\delta(S_X, b) = \{S_X\}$	$\delta(S_A, b) = \{S_A\}$	$\delta(S_B, b) = \{S_B\}$
$\delta(S_X, C) = \{X_X\}$	$\delta(S_A, C) = \{X_A\}$	$\delta(S_B, C) = \{X_B\}$

$M_C = (Q_C, N \cup T, \delta_C, C_C, S_C)$	$M_D = (Q_D, N \cup T, \delta_D, D_D, S_D)$	$M_Y = (Q_Y, N \cup T, \delta_Y, Y_Y, S_Y)$
$\delta(A_C, a) = \{S_C\}$	$\delta(A_D, a) = \{S_D\}$	$\delta(A_Y, a) = \{S_Y\}$
$\delta(B_C, b) = \{S_C\}$	$\delta(B_D, b) = \{S_D\}$	$\delta(B_Y, b) = \{S_Y\}$
$\delta(C_C, Y) = \{A_C\}$	$\delta(C_D, Y) = \{A_D\}$	$\delta(C_Y, Y) = \{A_Y\}$
$\delta(D_C, X) = \{B_C\}$	$\delta(D_D, X) = \{B_D\}$	$\delta(D_Y, X) = \{B_Y\}$
$\delta(X_C, b) = \{S_C\}$	$\delta(X_D, b) = \{S_D\}$	$\delta(X_Y, b) = \{S_Y\}$
$\delta(X_C, C) = \{X_C\}$	$\delta(X_D, C) = \{X_D\}$	$\delta(X_Y, C) = \{X_Y\}$
$\delta(Y_C, a) = \{S_C\}$	$\delta(Y_D, a) = \{S_D\}$	$\delta(Y_Y, a) = \{S_Y\}$
$\delta(Y_C, D) = \{Y_C\}$	$\delta(Y_D, D) = \{Y_D\}$	$\delta(Y_Y, D) = \{Y_Y\}$
$\delta(S_C, b) = \{S_C\}$	$\delta(S_D, b) = \{S_D\}$	$\delta(S_Y, b) = \{S_Y\}$
$\delta(S_C, C) = \{X_C\}$	$\delta(S_D, C) = \{X_D\}$	$\delta(S_Y, C) = \{X_Y\}$

oraz automaty  $M'_B$ ,  $B \in N - \{S'\}$ :

$M'_X = (Q_X, N \cup T, \delta'_X, \mathcal{S}_X, X_X)$	$M'_A = (Q_A, N \cup T, \delta'_A, \mathcal{S}_A, A_A)$	$M'_B = (Q_B, N \cup T, \delta'_B, \mathcal{S}_B, B_B)$
$\delta'(A_X, Y) = \{C_X\}$	$\delta'(A_A, Y) = \{C_A\}$	$\delta'(A_B, Y) = \{C_B\}$
$\delta'(B_X, X) = \{D_X\}$	$\delta'(B_A, X) = \{D_A\}$	$\delta'(B_B, X) = \{D_B\}$
$\delta'(X_X, C) = \{X_X, S_X\}$	$\delta'(X_A, C) = \{X_A, S_A\}$	$\delta'(X_B, C) = \{X_B, S_B\}$
$\delta'(Y_X, D) = \{Y_X\}$	$\delta'(Y_A, D) = \{Y_A\}$	$\delta'(Y_B, D) = \{Y_B\}$
$\delta'(\mathcal{S}_X, b) = \{X_X, S_X, B_X\}$	$\delta'(\mathcal{S}_A, b) = \{X_A, S_A, B_A\}$	$\delta'(\mathcal{S}_B, b) = \{X_B, S_B, B_B\}$
$\delta'(\mathcal{S}_X, a) = \{Y_X, A_X\}$	$\delta'(\mathcal{S}_A, a) = \{Y_A, A_A\}$	$\delta'(\mathcal{S}_B, a) = \{Y_B, A_B\}$

$M'_C = (Q_C, N \cup T, \delta'_C, \mathcal{S}_C, C_C)$	$M'_D = (Q_D, N \cup T, \delta'_D, \mathcal{S}_D, D_D)$	$M'_Y = (Q_Y, N \cup T, \delta'_Y, \mathcal{S}_Y, Y_Y)$
$\delta'(A_C, Y) = \{C_C\}$	$\delta'(A_D, Y) = \{C_D\}$	$\delta'(A_Y, Y) = \{C_Y\}$
$\delta'(B_C, X) = \{D_C\}$	$\delta'(B_D, X) = \{D_D\}$	$\delta'(B_Y, X) = \{D_Y\}$
$\delta'(X_C, C) = \{X_C, S_C\}$	$\delta'(X_D, C) = \{X_D, S_D\}$	$\delta'(X_Y, C) = \{X_Y, S_Y\}$
$\delta'(Y_C, D) = \{Y_C\}$	$\delta'(Y_D, D) = \{Y_D\}$	$\delta'(Y_Y, D) = \{Y_Y\}$
$\delta'(\mathcal{S}_C, b) = \{X_C, S_C, B_C\}$	$\delta'(\mathcal{S}_D, b) = \{X_D, S_D, B_D\}$	$\delta'(\mathcal{S}_Y, b) = \{X_Y, S_Y, B_Y\}$
$\delta'(\mathcal{S}_C, a) = \{Y_C, A_C\}$	$\delta'(\mathcal{S}_D, a) = \{Y_D, A_D\}$	$\delta'(\mathcal{S}_Y, a) = \{Y_Y, A_Y\}$

Krok 3. Na podstawie powyższych automatów konstruowane są następujące gramatyki:

$G'_X$	$G'_A$	$G'_B$
$\mathcal{S}_X \rightarrow bX_X \mid b \mid bB_X \mid aY_X \mid aA_X$	$\mathcal{S}_A \rightarrow bX_A \mid bB_A \mid aY_A \mid aA_A \mid a$	$\mathcal{S}_B \rightarrow bX_B \mid b \mid bB_B \mid aY_B \mid aA_B$
$A_X \rightarrow YC_X$	$A_A \rightarrow YC_A$	$A_B \rightarrow YC_B$
$B_X \rightarrow XD_X$	$B_A \rightarrow XD_A$	$B_B \rightarrow XD_B$
$X_X \rightarrow CX_X \mid C$	$X_A \rightarrow CX_A$	$X_B \rightarrow CX_B$
$Y_X \rightarrow DY_X$	$Y_A \rightarrow DY_A$	$Y_B \rightarrow DY_B$
Po usunięciu symboli nieużytecznych:		
$\mathcal{S}_X \rightarrow bX_X \mid b$	$\mathcal{S}_A \rightarrow a$	$\mathcal{S}_B \rightarrow b$
$X_X \rightarrow CX_X \mid C$		
$L(G'_X) = L_X = \{bC^k \mid k \geq 0\}$	$L(G'_A) = L_A = \{a\}$	$L(G'_B) = L_B = \{b\}$

$G'_C$	$G'_D$	$G'_Y$
$\mathcal{S}_C \rightarrow bX_C \mid bB_C \mid aY_C \mid aA_C$	$\mathcal{S}_D \rightarrow bX_D \mid bB_D \mid aY_D \mid aA_D$	$\mathcal{S}_Y \rightarrow bX_Y \mid bB_Y \mid aY_Y \mid a \mid aA_Y$
$A_C \rightarrow Y$	$A_D \rightarrow YC_D$	$A_Y \rightarrow YC_Y$
$B_C \rightarrow XD_C$	$B_D \rightarrow X$	$B_Y \rightarrow XD_Y$
$X_C \rightarrow CX_C$	$X_D \rightarrow CX_D$	$X_Y \rightarrow CX_Y$
$Y_C \rightarrow DY_C$	$Y_D \rightarrow DY_D$	$Y_Y \rightarrow DY_Y \mid D$
Po usunięciu symboli nieużytecznych:		
$\mathcal{S}_C \rightarrow aA_C$	$\mathcal{S}_D \rightarrow bB_D$	$\mathcal{S}_Y \rightarrow aY_Y \mid a$
$A_C \rightarrow Y$	$B_D \rightarrow X$	$Y_Y \rightarrow DY_Y \mid D$
$L(G'_C) = L_C = \{aY\}$	$L(G'_D) = L_D = \{bX\}$	$L(G'_Y) = L_Y = \{aD^k \mid k \geq 0\}$

Krok 4.

$G_X$  :  
 $\mathcal{S}_X \rightarrow bX_X \mid b$   
 $X_X \rightarrow aA_CX_X \mid aA_C$

$G_A$  :  
 $\mathcal{S}_A \rightarrow a$

$G_B$  :  
 $\mathcal{S}_B \rightarrow b$

$G_C :$   
 $S_C \rightarrow aA_C$   
 $A_C \rightarrow aY_Y \mid a$

$G_D :$   
 $S_D \rightarrow bB_D$   
 $B_D \rightarrow bX_X \mid b$

$G_Y :$   
 $S_Y \rightarrow aY_Y \mid a$   
 $Y_Y \rightarrow bB_D Y_Y \mid bB_D$

Krok 5.

$G' :$   
 $S \rightarrow b \mid bX_X C \mid bC$   
 $X \rightarrow bX_X C \mid bC \mid b$   
 $C \rightarrow aY$   
 $Y \rightarrow aY_Y D \mid aD \mid a$   
 $D \rightarrow bX$   
 $X_X \rightarrow aA_C X_X \mid aA_C$   
 $A_C \rightarrow aY_Y \mid a$   
 $B_D \rightarrow bX_X \mid b$   
 $Y_Y \rightarrow bB_D Y_Y \mid bB_D$   
 $A \rightarrow a$   
 $B \rightarrow b$

Ostatecznie, po usunięciu symboli nieosiągalnych, gramatyka  $G'$  ma postać:

$G' :$   
 $S \rightarrow b \mid bX_X C \mid bC$   
 $X \rightarrow bX_X C \mid bC \mid b$   
 $C \rightarrow aY$   
 $Y \rightarrow aY_Y D \mid aD \mid a$   
 $D \rightarrow bX$   
 $X_X \rightarrow aA_C X_X \mid aA_C$   
 $A_C \rightarrow aY_Y \mid a$   
 $B_D \rightarrow bX_X \mid b$   
 $Y_Y \rightarrow bB_D Y_Y \mid bB_D$

## 6 Podsumowanie

Metody Rosenkrantz'a i Autebert'a są stosunkowo skomplikowane dla gramatyk z większą liczbą nieterminali. Metoda Autebert'a wydaje się łatwiejsza i mniej podatna na błędy od metody Rosenkrantz'a. Jest to spowodowane głównie przez wzorce pokazane w najbardziej skomplikowanej części metody t.j. domknięcie względem lewostronnego oraz prawostronnego ilorazu. Reszta metody jest prosta. Podobne wzorce nie występują w metodzie Rosenkrantz'a.

Możliwości zaprezentowanych algorytmów podsumowuje poniższa tabela. Kwadratowa postać normalna Greibach (2-GNF) jest niejako graniczną postacią dla gramatyk bezkontekstowych. Uzyskanie bardziej standardowej postaci 1-GNF oznaczałoby że gramatyka jest regularna.

	GNF	2-GNF	podwójna GNF	podwójna 2-GNF
Paul	√	-	-	-
Rosenkrantz	√	-	√	-
Autebert	√	-	√	√
Blum-Koch	√	√	-	-

## Literatura

- [1] Blum N., Koch R., *Greibach Normal Form Transformation*, Informatik IV, Universität Bonn.
- [2] Autebert J.-M., Berstel J., Boasson L., *Context-Free Languages and Pushdown Automata*, Université Denis Diderot, Paris. Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [3] Rosenkrantz D. J., *Matrix Equations and Normal Forms for Context-Free Grammars*, Columbia University, New York.