AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Gramatyki, wyprowadzenia, rozbiór

Języki formalne i automaty

Dr inż. Janusz Majewski
Katedra Informatyki

Gramatyka

Gramatyką *G* nazywamy czwórkę uporządkowaną

$G = \langle V, \Sigma, P, Z \rangle$

gdzie:

- V – zbiór symboli nieterminalnych,
- Σ – zbiór symboli terminalnych,
- P – zbiór produkcji, z których każda ma postać
  $\alpha \rightarrow \beta$
- $Z \in V$ – wyróżniony symbol początkowy (nieterminal)

przy czym

$P \subseteq (V \cup \Sigma)^{+} \times (V \cup \Sigma)^{*}$

$P = \{ \alpha \rightarrow \beta \mid \alpha \in (V \cup \Sigma)^{+}, \beta \in (V \cup \Sigma)^{*} \}$

Przykład – palindromy (1)

Palindromem nazywamy łańcuch, który czytany od przodu oraz czytany wspak brzmi tak samo, czyli

$x^R = x$

Definicja rekurencyjna palindromu:

1) ε jest palindromem,
2) jeśli *a* jest symbolem $(a \in \Sigma)$, to łańcuch zbudowany z pojedynczego symbolu *a* jest palindromem,
3) jeśli *x* jeśli palindromem, zaś *a* jest symbolem $(a \in \Sigma)$, to łańcuch *axa* jest palindromem,
4) nic innego nie jest palindromem poza tym, co wynika z punktów (1), (2) i (3).

Przykład – palindromy (2)

Niech **Σ = {a, b}**

Definicja rekurencyjna palindromu:

1) ε jest palindromem,

   $S \rightarrow \varepsilon$

2) jeśli *a* jest symbolem $(a \in \Sigma)$, to łańcuch zbudowany z pojedynczego symbolu *a* jest palindromem,

   $S \rightarrow a$ **$S \rightarrow b$**

3) jeśli *S* jeśli palindromem, zaś *a* jest symbolem $(a \in \Sigma)$, to łańcuch *aSa* jest palindromem.

   $S \rightarrow aSa$ **$S \rightarrow bSb$**

Przykład – palindromy (3)

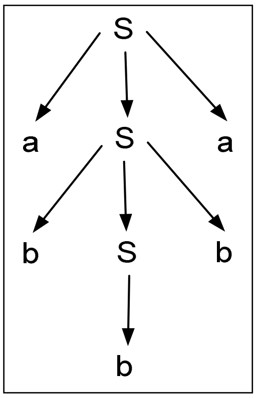
$G = \langle V = \{N\}, \Sigma = \{a, b\}, P = \{ S \rightarrow \varepsilon; S \rightarrow a; S \rightarrow b;$
$S \rightarrow aSa; S \rightarrow bSb\}, S = S \rangle$

Krótszy zapis: $\mathbf{S \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb}$

Przykładowe wyprowadzenie słowa: abbba

$S \Rightarrow^{S \rightarrow aSa} \mathbf{aSa} \Rightarrow^{S \rightarrow bSb} a\mathbf{bSb}a \Rightarrow^{S \rightarrow b} ab\mathbf{b}ba$

Drzewo wyprowadzenia:



Przykład

$S \rightarrow aSBa \mid aba$
$aB \rightarrow Ba$
$bB \rightarrow bb$

język: $\{ a^n b^n a^n \mid n \geq 0 \}$

S	**S**	**S**
aba	a**S**Ba	a**S**Ba
	aab**aB**a	aa**S**BaBa
	aa**bB**aa	aaab**aB**aBa
	aabbaa	aaa**bB**aaBa
		aaabba**aB**a
		aaabb**aB**aa
		aaab**bB**aaa
		aaabbbaaa

Język generowany przez gramatykę

Gramatyka jest jednym ze sposobów definiowania języka formalnego. Mając daną gramatykę *G* oznaczamy przez *L(G)* zbiór wszystkich słów *x*, które mogą być w tej gramatyce wyprowadzone z symbolu początkowego *S*. Zbiór ten nazywamy językiem generowanym przez daną gramatykę.

$L(G) = \{ x \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* x \}$

Automat skończony vs. gramatyka

Rozważamy język nad alfabetem binarnym $\Sigma = \{0, 1\}$ składający się z łańcuchów zero-jedynkowych o tej własności, że liczba zer w każdym łańcuchu jest parzysta i liczba jedynek w każdym łańcuchu też jest parzysta. Wszystkie łańcuchy binarne możemy podzielić na cztery grupy:

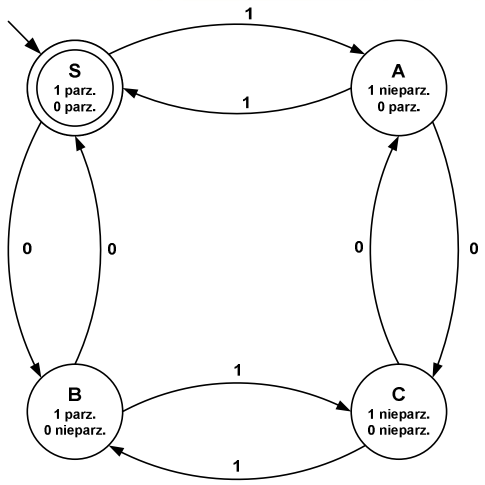
- S – łańcuchy z parzystą liczbą jedynek i parzystą liczbą zer,
- A – łańcuchy z parzystą liczbą jedynek i nieparzystą liczbą zer,
- B – łańcuchy z nieparzystą liczbą jedynek i parzystą liczbą zer,
- C – łańcuchy z nieparzystą liczbą jedynek i nieparzystą liczbą zer.

Analizujemy łańcuch zero-jedynkowy symbol po symbolu od lewej strony. Przed rozpoczęciem analizy jesteśmy w grupie S (łańcuch pusty zawiera zero jedynek i tyleż zer, więc liczba jedynek i liczba zer w tym łańcuchu są parzyste). Jeśli pierwszym symbolem jest jedynka – przechodzimy do grupy A (wtedy liczba jedynek jest nieparzysta, a liczba zer jest dalej parzysta), zaś jeśli pierwszym symbolem jest zero – przechodzimy do grupy B (wtedy liczba zer jest nieparzysta, a liczba jedynek jest dalej parzysta). Zapiszmy to tak:

S → 1A | 0B

Podobnie czynimy z dalszymi symbolami…

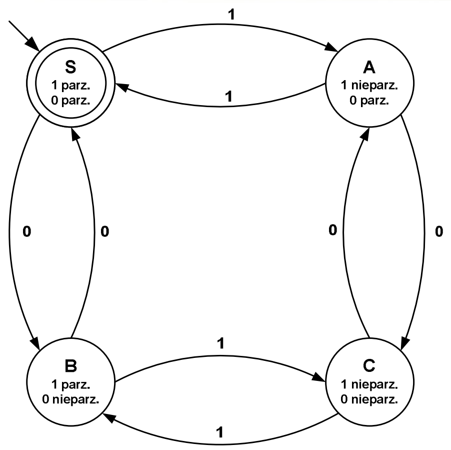
Automat skończony vs. gramatyka c.d.



Wreszcie, gdy przeczytaliśmy cały łańcuch, sprawdzamy, czy zatrzymaliśmy się w grupie S. Jeśli tak – badany łańcuch spełnia nałożony nań warunek parzystej liczby jedynek i parzystej liczby zer. Wówczas należy wyeliminować z wyprowadzenia symbol S (odpowiedni zapis: $\mathbf{S} \rightarrow \varepsilon$). Ostatecznie gramatyka naszego języka ma postać:

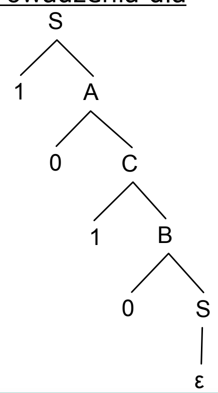
$$\mathbf{S \rightarrow 1A \mid 0B} \mid \varepsilon$$
$$\mathbf{A \rightarrow 1S \mid 0C}$$
$$\mathbf{B \rightarrow 1C \mid 0S}$$
$$\mathbf{C \rightarrow 1B \mid 0A}$$

Automat skończony vs. gramatyka c.d.



$$\mathbf{S \rightarrow 1A \mid 0B} \mid \varepsilon$$
$$\mathbf{A \rightarrow 1S \mid 0C}$$
$$\mathbf{B \rightarrow 1C \mid 0S}$$
$$\mathbf{C \rightarrow 1B \mid 0A}$$

Drzewo wyprowadzenia dla słowa: 1010



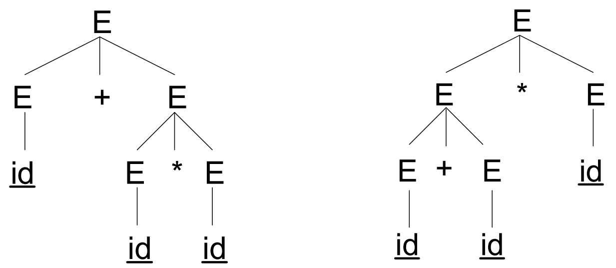
Wyprowadzenie dla słowa: 1010

$S \Rightarrow 1A \Rightarrow 10C \Rightarrow 101B \Rightarrow 1010S \Rightarrow 1010$

Gramatyka wyrażeń – przykład (1)

$G = <\{E\}, \{+, *, (,), \underline{id}\}, \{E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid \underline{id}\}, E>$

Analizowane słowo: id + id * id



Dla pewnego słowa (u nas: *id* + *id* * *id*) udało się zbudować dwa różne drzewa rozbioru syntaktycznego. Taka gramatyka jest niejednoznaczna.

Gramatyka wyrażeń – przykład (2)

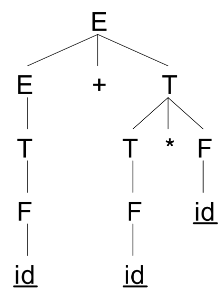
$G = <\{E, T, F\}, \{+, *, (,), \underline{id}\}, \{\ E \rightarrow E + T \mid T;\ T \rightarrow T * F \mid F;\ F \rightarrow (E) \mid \underline{id}\ \}, E>$

Analizowane słowo: id + id * id

Wyprowadzenie lewostronne

E
E+T
T+T
F+T
id+T
id+T*F
id+F*F
id+id*F
id+id*id

Drzewo rozbioru syntaktycznego



Wyprowadzenie prawostronne

E
E+T
E+T*F
E+T*id
E+F*id
E+id*id
T+id*id
F+id*id
id+id*id

Jednoznaczność gramatyki

- Dla każdego drzewa rozbioru syntaktycznego istnieje co najmniej jedno wyprowadzenie słowa języka L(G) w gramatyce G.
- Dla każdego wyprowadzenia słowa istnieje odpowiadające mu drzewo rozbioru syntaktycznego. Kilku różnym wyprowadzeniom mogą odpowiadać identyczne drzewa rozbioru syntaktycznego.
- Dwa wyprowadzenia są <u>równoważne</u>, gdy odpowiadające im drzewa rozbioru syntaktycznego są identyczne.
- Słowo języka L(G) jest <u>niejednoznaczne</u> w gramatyce G, jeśli jego wyprowadzenia można opisać przez co najmniej dwa różne drzewa rozbioru syntaktycznego.
- Gramatyka G jest <u>niejednoznaczna</u>, jeśli w języku L(G) istnieje co najmniej jedno niejednoznaczne słowo w tej gramatyce. W przeciwnym wypadku gramatyka jest <u>jednoznaczna</u>. W gramatyce jednoznacznej istnieje dokładnie jedno wyprowadzenie <u>lewostronne</u> i dokładnie jedno wyprowadzenie <u>prawostronne</u> (wśród wszystkich równoważnych wyprowadzeń tego samego słowa).

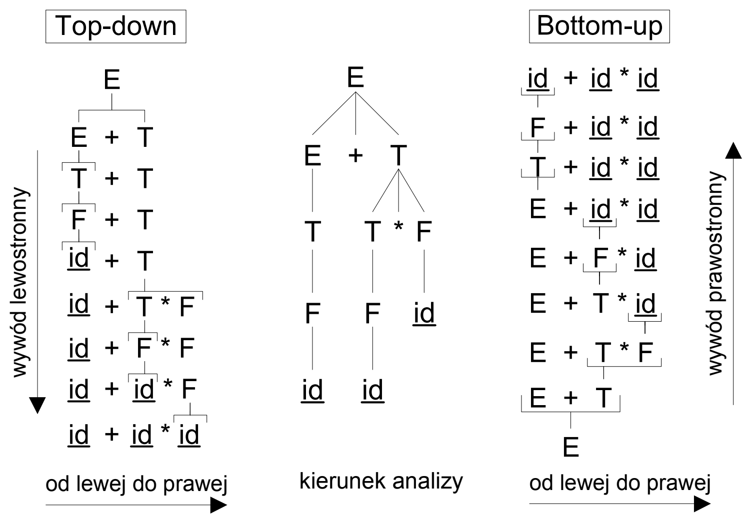
Metody rozbioru gramatycznego

<u>Problem rozbioru gramatycznego</u> jest próbą odpowiedzi na pytanie: „czy dany ciąg symboli terminalnych jest słowem należącym do języka L(G) generowanego przez daną gramatykę?”. Istota postępowania jest następująca: jeśli dla danego słowa można zbudować drzewo rozbioru w danej gramatyce, to słowo to należy do języka generowanego przez gramatykę, jeśli zaś dla badanego słowa nie można zbudować drzewa rozbioru, wówczas słowo nie należy do języka. W zależności od strategii budowania drzewa rozbioru stosujemy jeden z dwóch algorytmów:

- algorytm wyprowadzający „top-down” (budujemy drzewo w kolejności: od korzenia ku liściom, odtwarzając wyprowadzenie lewostronne)
- algorytm redukujący „bottom-up” (budujemy drzewo w odwrotnej kolejności: od liści ku korzeniowi, odtwarzając wyprowadzenie prawostronne)

Rozważany ciąg symboli badany jest zawsze od lewej strony, w tym sensie oba algorytmy są lewostronne.

Przykład



Przykład:

Gramatyka:

E → E + T | T

T → T * F | F

F → (E) | id

Analizowane słowo:

id + id * id

Metoda „top-down"

Symbol początkowy gramatyki ⇒ Analizowane słowo

Rozpoczynamy od symbolu wyróżnionego gramatyki. W każdym kroku najbardziej lewy symbol nieterminalny zastępujemy prawą stroną jakiejś produkcji. Jeśli w wyniku kolejnego kroku otrzymamy symbol terminalny, to sprawdzamy, czy jest on identyczny z odpowiednim symbolem analizowanego słowa. Jeśli nie, to możemy „cofnąć się" i spróbować od nowa, korzystając w ponownym wyprowadzeniu z jakiejś innej produkcji (lub innych produkcji). Byłby to algorytm z powrotami (mało efektywny). Wynik: akceptacja słowa lub odrzucenie w wyniku przebadania wszystkich możliwości.

Problem: „jak uniknąć konieczności powrotów" może być pozytywnie i jednoznacznie rozstrzygnięty dla pewnej klasy gramatyk bezkontekstowych zwanych gramatykami LL(k). „Top-down" odtwarza wyprowadzenie lewostronne.

Metoda „bottom-up”

Analizowane słowo ⇒ Symbol początkowy gramatyki

Analizując słowo od lewej strony bierzemy symbol bądź grupę symboli stanowiących prawą stronę produkcji jakiejś produkcji i zastępujemy ją lewą stroną tej produkcji. Postępujemy tak długo, aż dojdziemy do symbolu wyróżnionego gramatyki, co jest równoznaczne z akceptacją słowa. W każdym kroku powinna być redukowana prawa strona jakiejś produkcji. Także w tej metodzie możliwe jest postępowanie z powrotami.

Problem: „jak znaleźć prawą stronę produkcji nie mając jeszcze drzewa rozbioru syntaktycznego i czym ją zastąpić” może być pozytywnie i jednoznacznie rozstrzygnięty dla pewnych klas gramatyk bezkontekstowych: gramatyk precedencyjnych, czy tzw. gramatyk LR(k). „Bottom-up” odtwarza wyprowadzenie prawostronne.