

7. Własności języków bezkontekstowych – odpowiedzi

7.1.

(a) $L = \{ 0^i 1^j 2^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, (k \geq i \text{ lub } k \geq j) \}$

L jest oczywiście bezkontekstowy, gdyż jest generowany przez bezkontekstową gramatykę.

(b) $MIN(L) = \{ 0^i 1^j 2^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, k = \min(i, j) \}$

Twierdzimy, że $MIN(L)$ nie jest bezkontekstowy. Przypuśćmy bowiem, że język ten jest bezkontekstowy i niech n będzie stałą z lematu o rozrastaniu. Weźmy pod uwagę łańcuch $w = 0^n 1^n 2^n = xyvz$ o długości równej $3n \geq n$. Jeśli $uv \neq \varepsilon$ nie zawiera dwójek, to $xu^0yv^0z = xyz$ nie należy do $MIN(L)$, gdyż zawiera zbyt dużo dwójek. Jeśli uv zawiera jakąś dwójkę, to nie może zawierać zera, gdyż $|uyv| \leq n$. Tym samym łańcuch xu^2yv^2z zawiera co najmniej $n+1$ dwójek, co najmniej n jedynek i dokładnie n zer, czyli nie może on należeć do $MIN(L)$. Wobec tego $MIN(L)$ nie jest bezkontekstowy, a cały powyższy kontrprzykład świadczy o tym, że klasa języków bezkontekstowych nie jest zamknięta ze względu na operację MIN .

7.2.

(a) $L = \{ 0^i 1^j 2^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, (i \geq k \text{ lub } j \geq k) \}$

L jest oczywiście bezkontekstowy, gdyż jest generowany przez bezkontekstową gramatykę.

(b) $MAX(L) = \{ 0^i 1^j 2^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, k = \max(i, j) \}$

Twierdzimy, że $MAX(L)$ nie jest bezkontekstowy. Przypuśćmy bowiem, że język ten jest bezkontekstowy i niech n będzie stałą z lematu o rozrastaniu. Weźmy pod uwagę łańcuch $w = 0^n 1^n 2^n = xyvz$ o długości równej $3n \geq n$. Jeśli $uv \neq \varepsilon$ nie zawiera dwójek, to xu^2yv^2z nie należy do $MAX(L)$, gdyż zawiera zbyt mało dwójek w stosunku do liczby jedynek i/lub zer. Jeśli uv zawiera jakąś dwójkę, to nie może zawierać zera, gdyż $|uyv| \leq n$. Tym samym łańcuch $xu^0yv^0z = xyz$ zawiera co najwyżej $n-1$ dwójek, co najwyżej n jedynek i dokładnie n zer, czyli nie może on należeć do $MAX(L)$. Wobec tego $MAX(L)$ nie jest bezkontekstowy, a cały powyższy kontrprzykład świadczy o tym, że klasa języków bezkontekstowych nie jest zamknięta ze względu na operację MAX .

7.3.

(a) Nie. Przypuśćmy bowiem, że język L_1 jest bezkontekstowy i niech n będzie stałą z lematu o rozrastaniu. Weźmy pod uwagę łańcuch $w = a^n b^n c^n = xyvz$ o długości równej $3n \geq n$. Jeśli $uv \neq \varepsilon$ nie zawiera liter c , to xu^2yv^2z nie należy do L_1 , gdyż zawiera zbyt mało liter c w stosunku do liczby liter b i/lub liter a . Jeśli uv zawiera jakąś literę c , to nie może zawierać litery a , gdyż $|uyv| \leq n$. Tym samym łańcuch $xu^0yv^0z = xyz$ zawiera co najwyżej $n-1$ liter c , co najwyżej n liter b i dokładnie n liter a , czyli nie może on należeć do L_1 . Wobec tego L_1 nie jest bezkontekstowy.

(b) Tak, istnieje bowiem bezkontekstowa gramatyka generująca L_2 :

$$S \rightarrow AB \mid C$$

$$A \rightarrow aA \mid a$$

$$B \rightarrow bBc \mid bB \mid bc$$

$$C \rightarrow aCc \mid aC \mid aDc$$

$$D \rightarrow bD \mid b$$

7.4.

(a) Nie. Przypuśćmy bowiem, że język L_1 jest bezkontekstowy i niech n będzie stałą z lematu o rozrastaniu. Weźmy pod uwagę łańcuch $w = a^n b^n c^n = xyvz$ o długości równej $3n \geq n$. Jeśli $uv \neq \varepsilon$ nie zawiera liter c , to $xu^0yv^0z = xyz$ nie należy do L_1 , gdyż zawiera zbyt dużo

liter c . Jeśli uv zawiera jakąś literę c , to nie może zawierać litery a , gdyż $|uyv| \leq n$. Tym samym łańcuch xu^2yv^2z zawiera co najmniej $n+1$ liter c , co najmniej n liter b i dokładnie n liter a , czyli nie może on należeć do L_1 . Wobec tego L_1 nie jest bezkontekstowy.

(b) Tak, istnieje bowiem bezkontekstowa gramatyka generująca L_2 :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid C \\ A &\rightarrow aA \mid a \\ B &\rightarrow bBc \mid Bc \mid bc \\ C &\rightarrow aCc \mid Cc \mid aDc \\ D &\rightarrow bD \mid b \end{aligned}$$

7.5.

(a) Nie; przypuśćmy, że język ten jest bezkontekstowy i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków bezkontekstowych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuyvz$, gdzie $m = 2^k$. Słowo w ma długość równą $2^k > k$. Wówczas uv może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a . Wtedy łańcuch xu^2yv^2z zawiera co najmniej 2^k+1 i co najwyżej 2^k+k liter a . Ponieważ $2^k < 2^k+1 < 2^k+k < 2^k+2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ więc liczba liter a w słowie xu^2yv^2z nie może być naturalną potęgą dwójki dla żadnej liczby naturalnej stojącej w wykładniku większej od k . Tak więc xu^2yv^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być bezkontekstowy.

(b) Tak; gdyż język ten może być opisany przy pomocy wyrażenia regularnego $\mathbf{aa(aa)^*}$, jest więc językiem regularnym, a wobec tego także bezkontekstowym.

7.6.

(a) Nie; przypuśćmy, że język ten jest bezkontekstowy i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków bezkontekstowych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuyvz$, gdzie $m = k^2$. Słowo w ma długość równą $k^2 > k$. Wówczas uv może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a . Wtedy łańcuch xu^2yv^2z zawiera co najmniej k^2+1 i co najwyżej k^2+k liter a . Ponieważ $k^2 < k^2+1 < k^2+k < k^2+2k+1 = (k+1)^2$ więc liczba liter a w słowie xu^2yv^2z nie może być kwadratem żadnej liczby naturalnej większej od k . Tak więc xu^2yv^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być bezkontekstowy.

(b) Tak; gdyż język ten może być opisany przy pomocy wyrażenia regularnego $\mathbf{aaa(aaa)^*}$, jest więc językiem regularnym, a wobec tego także bezkontekstowym.

7.8.

(a) $L_1 = \{ a^i b^j c^i \mid i > 0 \}$ nie jest językiem bezkontekstowym. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że L jest bezkontekstowy i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu. Weźmy pod uwagę łańcuch $w = a^k b^k c^k$. Niech rozkład $w = xuyvz$ spełnia warunki lematu o rozrastaniu. Wtedy wobec $|uyv| \leq k$ łańcuch uv może zawierać co najwyżej dwa różne symbole. Co więcej, jeśli uv zawiera dwa różne symbole, to muszą one być symbolami kolejnymi, np. a i b . Jeśli uv zawiera wyłącznie symbole a , to xyz ma mniej symboli a niż symboli c oraz symboli b , czyli $xyz \notin L$ – sprzeczność. Postępujemy podobnie, jeśli uv składa się wyłącznie z symboli b lub wyłącznie z symboli c . Przypuśćmy teraz, że uv zawiera symbole a oraz symbole b . Jeżeli u lub v zawiera dwa różne symbole, to $xu^2yv^2z \notin L$. (Dla przykładu, jeśli u składa się z symboli a i b to xu^2yv^2z zawiera symbol b poprzedzający symbol a). Jeśli zaś u zawiera tylko symbole a oraz v tylko symbole b , to wtedy xyz ma nadal mniej symboli a i symboli b niż symboli c , czyli znowu $xyz \notin L$. Podobna sprzeczność pojawia się w przypadku, gdy uv składa się z symboli b i symboli c . Ponieważ są to jedyne możliwości, to wnioskujemy, że L nie jest językiem bezkontekstowym.

$L_2 = \{ a^i b^j c^i \mid i > 0; j > 0 \}$ generowany przez gramatykę bezkontekstową:

$S \rightarrow AB$

$A \rightarrow aAb \mid ab$

$B \rightarrow cB \mid c$

oraz $L_3 = \{ a^i b^j c^i \mid i > 0; j > 0 \}$ generowany przez gramatykę bezkontekstową:

$S \rightarrow aSc \mid aBc$

$B \rightarrow bB \mid b$

są oczywiście językami bezkontekstowymi

(b) Język $L_1 = L_2 \cap L_3 = \{ a^i b^i c^i \mid i > 0 \}$ nie jest językiem bezkontekstowym, jak to pokazano w punkcie (a). Klasa języków bezkontekstowych nie jest więc zamknięta ze względu na iloczyn teoriomnościowy

7.9.

(a) $L_1 = \{ a^i b^j a^i \mid i \geq 1, j \geq 1 \}$ nie jest bezkontekstowy, a więc tym bardziej nie jest regularny. Przypuśćmy bowiem dla dowodu nie wprost, że L_1 jest bezkontekstowy i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu. Weźmy pod uwagę łańcuch $w = a^k b^k a^k b^k$. Niech rozkład $w = xyvz$ spełnia warunki lematu o rozrastaniu. Wtedy wobec $|y| \leq k$ łańcuch uv może zawierać co najwyżej kolejne symbole z dwóch kolejnych podłańcuchów danych liter, np. a i b lub b i a . Jeśli uv zawiera wyłącznie symbole a z pierwszego podłańcucha składającego się z liter a , to xyz ma mniej symboli a w pierwszym podłańcuchu liter a niż w drugim podłańcuchu tych samych liter, czyli $xyz \notin L_1$ – sprzeczność. Postępujemy podobnie, jeśli uv składa się wyłącznie z symboli b z pierwszego podłańcucha liter b , wyłącznie z symboli a z drugiego podłańcucha liter a lub wyłącznie z symboli b z drugiego podłańcucha liter b . Przypuśćmy teraz, że uv zawiera symbole a oraz symbole b . Jeżeli któryś z łańcuchów u lub v zawiera dwa różne symbole, to $xu^2yv^2z \notin L_1$. (Dla przykładu, jeśli u składa się z symboli a i b to xu^2yv^2z zawiera symbol b poprzedzający symbol a). Jeśli teraz u zawiera tylko symbole a z pierwszego podłańcucha liter a oraz v tylko symbole b z pierwszego podłańcucha liter b , to wtedy xyz ma nadal mniej symboli a w pierwszym podłańcuchu liter a niż symboli a w drugim podłańcuchu liter a , czyli znowu $xyz \notin L_1$. Podobna sprzeczność pojawia się w przypadku, gdy uv składa się z symboli b z pierwszego podłańcucha liter b i symboli a z drugiego podłańcucha liter a lub z symboli a z drugiego podłańcucha liter a i symboli b z drugiego podłańcucha liter b . Ponieważ są to jedyne możliwości, to wnioskujemy, że L_1 nie jest językiem bezkontekstowym.

Język $L_2 = \{ a^i b^j a^k b^n \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1 \text{ oraz } n \geq 1 \}$ jest oczywiście bezkontekstowy, gdyż jest regularny; może być przedstawiony przy pomocy wyrażenia regularnego $aa^*bb^*aa^*bb^*$.

(b) Prawdziwość twierdzenie przedstawionego w punkcie (b) zadania pociąga prawdziwość twierdzenia przeciwnego: jeżeli $L \cap R$ nie jest językiem bezkontekstowym, to język L nie jest językiem bezkontekstowym lub język R nie jest zbiorem regularnym. W naszym zadaniu zachodzi:

$$L_1 = L_2 \cap L_3$$

więc skoro L_1 nie jest bezkontekstowy, a L_2 na pewno jest regularny, to L_3 nie może być bezkontekstowy.

7.10. (Szkic odpowiedzi)

(a) $L_1 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, j = \max(i, k) \}$ nie jest bezkontekstowy. Załóżmy dla dowodu nie wprost że L_1 jest bezkontekstowy i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu. Rozważamy łańcuch $w = a^k b^k c^k = xyvz$. Wtedy wobec $|y| \leq k$ łańcuch

uv może zawierać co najwyżej dwa różne symbole lub symbole jednego tylko rodzaju. Jeśli uv zawiera tylko symbole a , to pompowanie spowoduje, że w xu^2yv^2z symboli b będzie zbyt mało. Podobnie byłoby, gdyby uv zawierało tylko symbole c . Jeśli uv zawiera tylko symbole b , to pompowanie spowoduje, że w xu^2yv^2z symboli b będzie zbyt wiele. Jeśli u zawiera tylko symbole a , zaś v zawiera tylko symbole b , to w $xyz = xu^0yv^0z$ symboli b będzie zbyt mało. Podobnie byłoby, gdyby u zawierało tylko symbole b , zaś v zawierało tylko symbole c . Ponieważ zostały wyczerpane wszystkie możliwości – język L_1 nie jest bezkontekstowy.

- (b) $L_2 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1 \}$ jest regularny (opisujące go wyrażenie regularne $aa^*bb^*cc^*$), więc siłą rzeczy jest bezkontekstowy.
- (c) $L_3 = \{ a^i b^j c^k \mid i \geq 1, j \geq 1, k \geq 1, i = k \}$ jest bezkontekstowy, gdyż jest generowany przez gramatykę bezkontekstową:

$$S \rightarrow aSc \mid aAc$$

$$A \rightarrow bA \mid b$$

Język ten nie jest regularny. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że L_3 jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważmy łańcuch $w = a^k b c^k = xuz$. Podłańcuch u może zawierać tylko symbole jednego rodzaju (dlaczego?). Co więcej nie mogą to być symbole a ani c , gdyż pompowanie na przykład tylko części słowa zawierającej litery a spowoduje, że w całym słowie będzie więcej liter a niż liter c . Podłańcuch u może zawierać więc tylko symbole b , a dokładniej w naszym słowie musi to być jedyna litera b . Jednak wówczas $xu^0z = a^k c^k \notin L_3$. Stąd L_3 nie jest regularny.

7.13.

(b) $L = \{ a^l b^m c^n \mid l \neq m, m \neq n, l \neq n \}$. Przypuśćmy, że L jest bezkontekstowy. Niech k będzie stałą z lematu Ogdena. Weźmy pod uwagę łańcuch $w = a^k b^{k+k!} c^{k+2k!}$. Załóżmy, że wyróżniamy pozycje symboli a , niech rozkład $w = xuyvz$ spełnia warunki lematu Ogdena. Jeżeli u lub v zawiera dwa różne symbole, to $xu^2yv^2z \notin L$. (Dla przykładu, jeśli u składa się z symboli a i b to xu^2yv^2z zawiera symbol b poprzedzający symbol a .) Jednak przynajmniej jedno spośród u i v musi zawierać symbole a , ponieważ tylko te symbole występują na wyróżnionych pozycjach. Zatem jeśli $v \in \{b\}^*$ lub $v \in \{c\}^*$, to u musi należeć do $\{a\}^+$. Jeżeli $v \in \{a\}^+$, to u musi należeć do $\{a\}^*$, gdyż inaczej jakiś symbol b lub c poprzedziłby symbol a . Rozważmy szczegółowo przypadek, gdy $v \in \{b\}^*$, a $u \in \{a\}^+$. (Pozostałe przypadki traktowane są w podobny sposób.) Niech $p = |u|$. Wtedy $1 \leq p \leq k$, czyli p dzieli $k!$. Niech q będzie liczbą całkowitą, taką że $pq = k!$. Wtedy $w' = xu^{2q+1}yv^{2q+1}z \in L$. Ale $u^{2q+1} = a^{p(2q+1)} = a^{2pq+p} = a^{2k!+p}$. Ponieważ xyz zawiera dokładnie $k-p$ symboli a , to w' zawiera $2k!+p+(k-p)$ czyli $2k!+k$ symboli a , czyli tyle samo co symboli c , stąd $w' \notin L$ – sprzeczność. Podobna sprzeczność pojawia się w przypadku, gdy $v \in \{c\}^*$ lub $v \in \{a\}^+$. Zatem L nie jest językiem bezkontekstowym.

(c) $L = \{ a^i b^j c^j \mid j \neq i \}$. Przypuśćmy, że L jest bezkontekstowy. Niech k będzie stałą z lematu Ogdena. Weźmy pod uwagę łańcuch $w = a^k b^k c^{k+k!}$. Załóżmy, że wyróżniamy pozycje symboli a , niech rozkład $w = xuyvz$ spełnia warunki lematu Ogdena. Jeżeli u lub v zawiera dwa różne symbole, to $xu^2yv^2z \notin L$. (Dla przykładu, jeśli u składa się z symboli a i b to xu^2yv^2z zawiera symbol b poprzedzający symbol a .) Jednak przynajmniej jedno spośród u i v musi zawierać symbole a , ponieważ tylko te symbole występują na wyróżnionych pozycjach. Z uwagi na konieczność zapewnienia synchronicznego pompowania bloków liter a oraz liter b widać, że powinno być $v \in \{b\}^+$. (Czytelnik jest proszony o sformalizowanie tej myśli.) Rozważmy szczegółowo przypadek, gdy $v \in \{b\}^+$, a $u \in \{a\}^+$. Niech $p = |u|$. Wtedy $1 \leq p \leq k$, czyli p dzieli $k!$. Niech q będzie liczbą całkowitą, taką że

$pq = k!$ Wtedy $w' = xu^{q+1}yv^{q+1}z \in L$. Ale $u^{q+1} = a^{p(q+1)} = a^{pq+p} = a^{k!+p}$. Ponieważ xyz zawiera dokładnie $k-p$ symboli a , to w' zawiera $k!+p+(k-p)$ czyli $k!+k$ symboli a , czyli tyle samo symboli c , stąd $w' \notin L$ – sprzeczność. Zatem L nie jest językiem bezkontekstowym.

7.14. (szkic odpowiedzi)

(a) Niech $G = \langle N, T, P, Z \rangle$ będzie gramatyką bezkontekstową w postaci normalnej Chomsky'ego. Aby skonstruować gramatykę G' taką, że $L(G') = \text{CYKL}(L(G))$, weźmy pod uwagę drzewo wyprowadzenia słowa x_1x_2 w gramatyce G . Śledzimy drogę z Z do pierwszego od lewej symbolu słowa x_2 . Chcemy wygenerować tę drogę w odwrotnej kolejności (z dołu do góry), umieszczając jednocześnie poszczególne symbole po przeciwnej stronie drogi (w stosunku do tej, po której się pierwotnie pojawiły). W tym celu konstruujemy

$$G' = \langle N \cup \{A' \mid A \in N\} \cup \{Z_0\}, T, P', Z_0 \rangle$$

gdzie P' zawiera:

- (1) wszystkie produkcje z P ,
- (2) $C' \rightarrow A'B$ i $B' \rightarrow CA'$, jeśli P zawiera $A \rightarrow BC$,
- (3) $Z' \rightarrow \varepsilon$,
- (4) $Z_0 \rightarrow aA'$, jeśli P zawiera $A \rightarrow a$,
- (5) $Z_0 \rightarrow Z$.

Aby udowodnić, że $L(G') = \text{CYKL}(L(G))$, pokazujemy przez indukcję względem długości wyprowadzenia, że $A'_1 \Rightarrow^* A_1A_2 \cdots A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego i

$$A'_1 \Rightarrow^* A_{i+1} \cdots A_n A' A_1 A_2 \cdots A_{i-1}.$$

Zatem

$$Z \Rightarrow^* A_1 A_2 \cdots A_n \Rightarrow^* A_1 A_2 \cdots A_{i-1} a A_{i+1} \cdots A_n$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} Z_0 \Rightarrow^* a A'_1 \Rightarrow^* a A_{i+1} \cdots A_n Z' A_1 \cdots A_{i-1} \\ \Rightarrow^* a A_{i+1} \cdots A_n A_1 A_2 \cdots A_{i-1}. \end{aligned}$$

Rozważmy przykładowe gramatyki G i G' :

gramatyka G :

$$\begin{aligned} Z &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow 0 \\ B &\rightarrow CD \\ C &\rightarrow EF \\ D &\rightarrow 4 \\ E &\rightarrow 1 \\ F &\rightarrow GH \\ G &\rightarrow 2 \\ H &\rightarrow 3 \end{aligned}$$

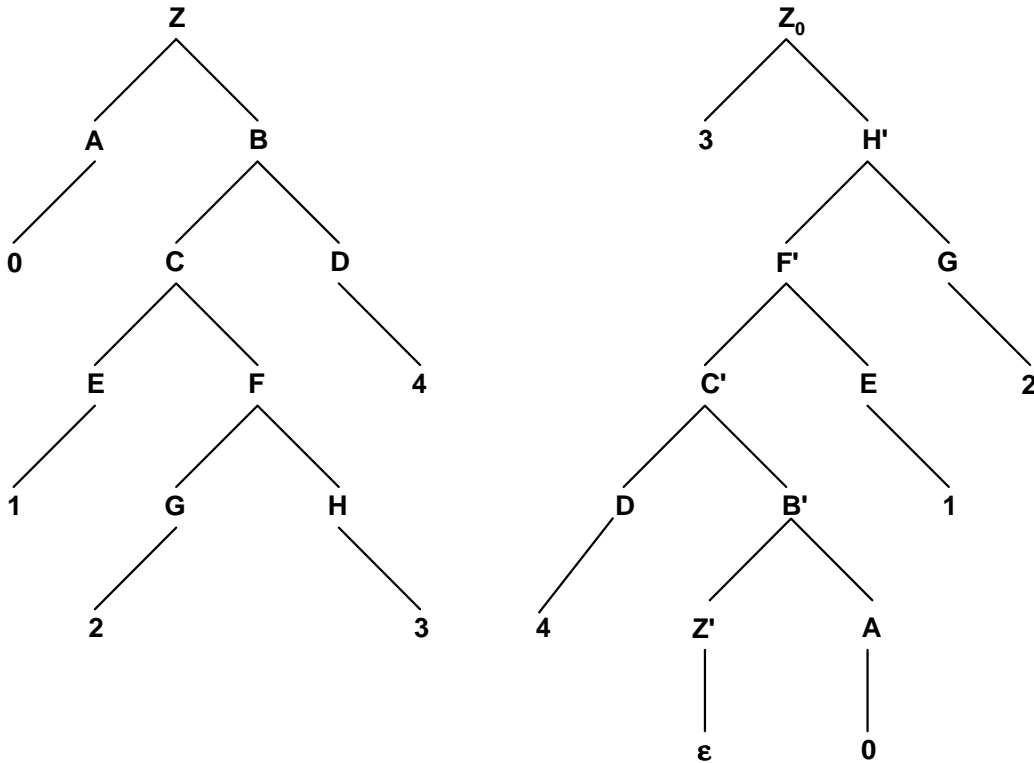
gramatyka G' :

$$\begin{aligned} Z_0 &\rightarrow Z \mid 0A' \mid 4D' \mid 1E' \mid 2G' \mid 3H' \\ Z &\rightarrow AB \\ Z' &\rightarrow \varepsilon \\ A &\rightarrow 0 \\ A' &\rightarrow BZ' \\ B &\rightarrow CD \\ B' &\rightarrow ZA \\ C &\rightarrow EF \\ C' &\rightarrow DB' \\ D &\rightarrow 4 \\ D' &\rightarrow B'C \\ E &\rightarrow 1 \\ E' &\rightarrow FC' \\ F &\rightarrow GH \\ F' &\rightarrow C'E \\ G &\rightarrow 2 \\ G' &\rightarrow HF' \end{aligned}$$

$$H \rightarrow 3$$

$$H' \rightarrow F'G$$

Drzewo wyprowadzenia w gramatyce G wraz z odpowiadającym mu drzewu wyprowadzenia w gramatyce G' pokazano na rysunku:



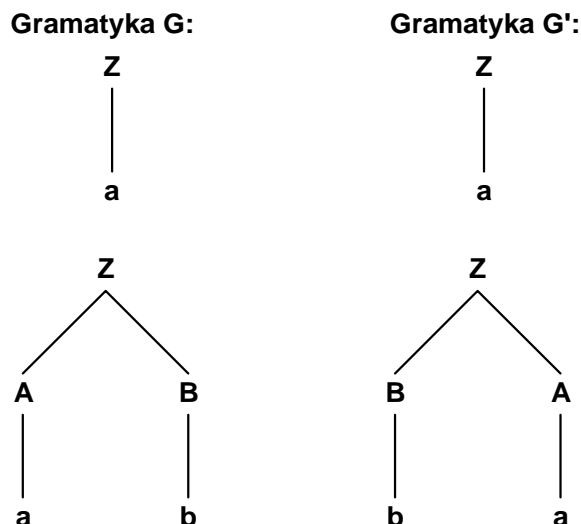
(b) Niech $G = \langle N, T, P, Z \rangle$ będzie gramatyką bezkontekstową w postaci normalnej Chomsky'ego. Aby skonstruować gramatykę G' taką, że $L(G') = (L(G))^R$ zauważymy, że wystarczy w gramatyce G' dokonać odbicia zwierciadlanego prawych stron poszczególnych produkcji gramatyki G . Wówczas wyprowadzenia w G' tworzone w tej samej kolejności, co w gramatyce G (od góry ku dołowi), będą budowały słowo terminalne “od końca do początku”. Konstruujemy więc

$$G' = \langle N, T, P', Z \rangle$$

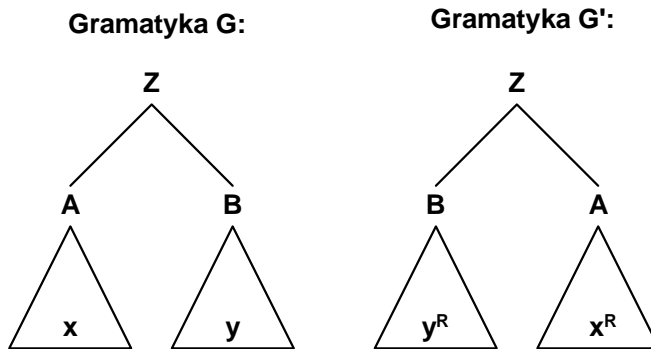
gdzie P' zawiera:

- (1) $A \rightarrow CB$, jeśli P zawiera $A \rightarrow BC$,
- (2) wszystkie produkcje typu $A \rightarrow a$ ze zbioru P .

Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości słowa. Podstawę indukcyjną dla słów o długości jeden i dwa pokazuje poniższy rysunek



zaś krok indukcyjny jest dowodzony z wykorzystaniem oczywistej zależności $(xy)^R = y^R x^R$, co ilustruje kolejny rysunek:



Rozważmy przykładowe gramatyki G i G' :

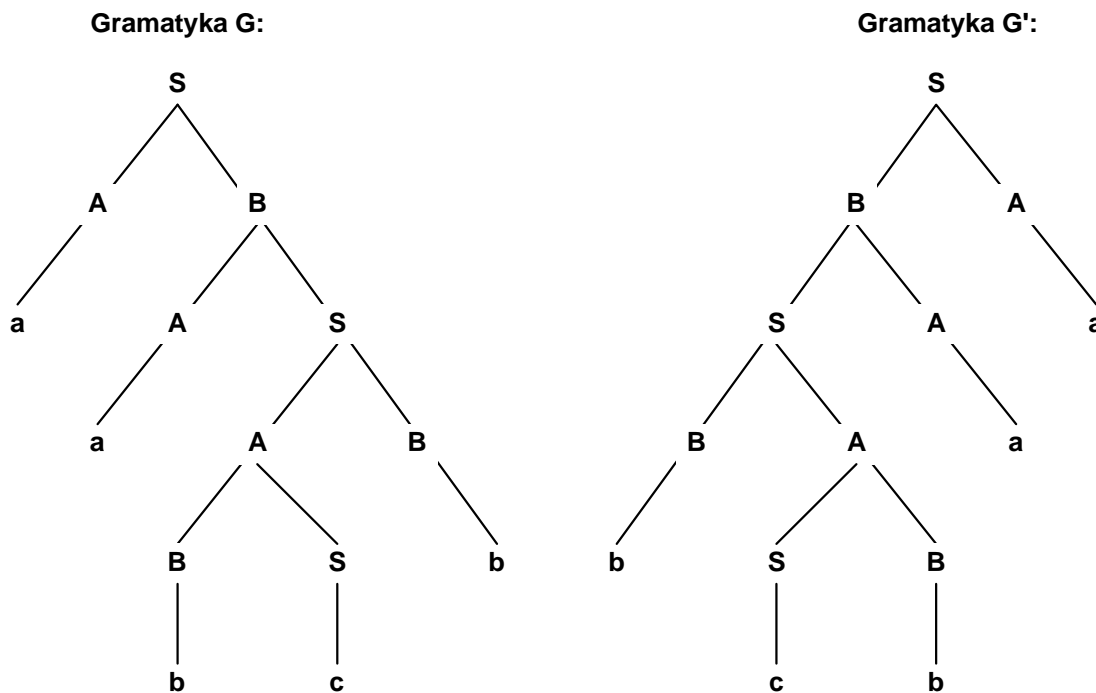
gramatyka G :

$S \rightarrow c \mid AB$
 $A \rightarrow a \mid BS$
 $B \rightarrow b \mid AS$

gramatyka G' :

$S \rightarrow c \mid BA$
 $A \rightarrow a \mid SB$
 $B \rightarrow b \mid SA$

Drzewo wyprowadzenia w gramatyce G wraz z odpowiadającym mu drzewu wyprowadzenia w gramatyce G' pokazano na rysunku:



7.15. Tak

		a	a	a	a	a
				$i \rightarrow$		
		1	2	3	4	5
1		A,C	A,C	A,C	A,C	A,C
j		B	B	B	B	
↓		S,A,C	S,A,C	S,A,C		
4		B	B			

5

S,A,C

7.16. Nie

		a	a	a	a	a	a
				i →			
		1	2	3	4	5	6
1		A,C	A,C	A,C	A,C	A,C	A,C
2		B	B	B	B	B	
j	3	S,A,C	S,A,C	S,A,C	S,A,C		
↓	4	B	B	B			
	5	S,A,C	S,A,C				
	6	B					

7.17. Tak

		b	a	a	b	a
				i →		
		1	2	3	4	5
1		B	A,C	A,C	B	A,C
j	2	S,A	B	S,C	S,A	
↓	3	∅	B	B		
	4	∅	S,A,C			
	5	S,A,C				

7.18. Tak

		b	b	b	a	b
				i →		
		1	2	3	4	5
1		B	B	B	A,C	B
j	2	∅	∅	S,A	S,C	
↓	3	∅	A	S,C		
	4	A	S,C			
	5	S,C				