

11. Własności języków regularnych – odpowiedzi

11.1

Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuz$, gdzie $m = k^2$. Słowo w ma długość równą $k^2 > k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a . Wtedy łańcuch xu^2z zawiera co najmniej $k^2 + 1$ i co najwyżej $k^2 + k$ liter a . Ponieważ $k^2 < k^2 + 1 < k^2 + k < k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$ więc liczba liter a w słowie xu^2z nie może być kwadratem żadnej liczby naturalnej większej od k . Tak więc xu^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.2.

Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuz$, gdzie $m = k^3$. Słowo w ma długość równą $k^3 > k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a . Wtedy łańcuch xu^2z zawiera co najmniej $k^3 + 1$ i co najwyżej $k^3 + k$ liter a . Ponieważ $k^3 < k^3 + 1 < k^3 + k < k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k + 1)^3$ więc liczba liter a w słowie xu^2z nie może być sześcianem żadnej liczby naturalnej większej od k . Tak więc xu^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.3.

Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuz$, gdzie $m = k!$. Słowo w ma długość równą $k! > k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a . Wtedy łańcuch xu^2z zawiera co najmniej $k! + 1$ i co najwyżej $k! + k$ liter a . Ponieważ $k! < k! + 1 < k! + k < k! \cdot (k + 1) = (k + 1)!$ (ostatnia nierówność słuszna dla $k \geq 2$) więc liczba liter a w słowie xu^2z nie może być silnią żadnej liczby naturalnej większej od k . Tak więc xu^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.4.

Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^m = xuz$, gdzie $m = 2^k$. Słowo w ma długość równą $2^k > k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a . Wtedy łańcuch xu^2z zawiera co najmniej $2^k + 1$ i co najwyżej $2^k + k$ liter a . Ponieważ $2^k < 2^k + 1 < 2^k + k < 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ więc liczba liter a w słowie xu^2z nie może być naturalną potęgą dwójki dla żadnej liczby naturalnej stojącej w wykładniku większej od k . Tak więc xu^2z nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.5.

Tak; gdyż język ten może być opisany przy pomocy wyrażenia regularnego $\mathbf{aa(aa)^*}$, jest więc językiem regularnym.

11.6.

Tak, gdyż język ten może być opisany przy pomocy wyrażenia regularnego $\mathbf{aaa(aaa)^*}$, jest więc językiem regularnym.

11.7.

Nie; przypuśćmy, że język ten jest regularny i niech k będzie stałą z lematu o rozrastaniu języków regularnych. Rozważamy słowo $w = a^k b^k c^{2k} = xuz$. Słowo w ma długość równą $4k > k$. Wówczas u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter a (przypadek (1)) lub

u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter b (przypadek (2)) lub u może zawierać od jednej do maksymalnie k liter c (przypadek (3)). Wybranie u w inny sposób spowoduje, że przy rozrastaniu u^i pojawią się "przeplatanki" symboli, np. $abab\dots$ lub $bcbcb\dots$. Rozważymy łańcuch xu^2z . W przypadku (1) zawiera on co najmniej $k+1$ i co najwyżej $2k$ liter a . Wówczas xu^2z nie należy do języka, gdyż liczba liter b pozostaje bez zmiany, zaś liter c jest zbyt mało. Analogicznie rozpatrujemy przypadek (2). W przypadku (3) łańcuch xu^2z zawiera co najmniej $2k+1$ i co najwyżej $3k$ liter c , zaś liczba liter a oraz b pozostaje bez zmiany, jest więc za dużo liter c i słowo xu^2z także nie należy do języka. Tak więc xu^2z w żadnym możliwym przypadku nie należy do naszego języka, język ten nie może być regularny.

11.8.

Tak, gdyż język ten może być opisany przy pomocy wyrażenia regularnego $aa^*bb^*cc^*$, jest więc językiem regularnym.

Tw. Jeśli L jest językiem regularnym to $(\exists k) ((w \in L \wedge |w| \geq k) \Rightarrow (w = xuz \wedge 0 < |u| \leq k \wedge (\forall i \geq 0) (xu^i z \in L)))$