

4. Własności i przekształcenia języków – zadania

Czy poniższe języki mają własność przedrostkową? Czy poniższe języki mają własność przyrostkową? Uzasadnić.

4.1. $L_1 = \emptyset$

4.2. $L_2 = \{\varepsilon\}$

4.3. $L_3 = \{x \mid x \in \{a,b\}^+, \text{ liczba symboli } a \text{ w słowie } x \text{ jest równa liczbie symboli } b \text{ w słowie } x\}$

4.4. $L_4 = \{x \mid x \in \{a,b\}^+, \text{ liczba symboli } a \text{ w słowie } x \text{ parzysta oraz liczba symboli } b \text{ w słowie } x \text{ jest parzysta}\}$

4.5. $L_5 = L^*$, jeśli L posiada własność przedrostkową

4.6. $L_6 = L^+$, jeśli L posiada własność przyrostkową

4.7. $L_7 = \{0^i 1^j 2^k \mid (k \leq i \text{ lub } k \leq j) \text{ oraz } i, j, k \geq 1\}$

4.8. $L_8 = \{0^i 1^j 2^k \mid (i \leq k \text{ lub } j \leq k) \text{ oraz } i, j, k \geq 1\}$

4.9. $L_9 = \{x \mid x \in \{a,b\}^+, \text{ liczba symboli } a \text{ w słowie } x \text{ parzysta, zaś liczba symboli } b \text{ w słowie } x \text{ jest nieparzysta}\}$

4.10. $L_{10} = \{x \mid x \in \{a,b\}^+, \text{ liczba symboli } a \text{ w słowie } x \text{ jest o jeden większa od liczby symboli } b \text{ w słowie } x\}$

4.11. $L_{11} = L^+$, jeśli L posiada obie własności: przyrostkową i przedrostkową

4.12. $L_{12} = L^*$, jeśli L posiada skończoną liczbę słów

4.13. $L_{13} = \{0^i 1^j 2^k \mid k = \min(i, j) \text{ oraz } i, j, k \geq 1\}$

4.14. $L_{14} = \{0^i 1^j 2^k \mid k = \max(i, j) \text{ oraz } i, j, k \geq 1\}$

Rozwiąż poniższe zadania związane z homomorfizmami.

4.15. Niech h będzie homomorfizmem $h: T \mapsto V^*$ oraz

$$T = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$V = \{a, b\}$$

$$h(0) = aa$$

$$h(1) = ab$$

$$h(2) = ba$$

$$h(3) = bb$$

Wyznaczyć: $h(h^{-1}(\{a,b\}^*))$

4.16. Niech h będzie homomorfizmem $h: T \mapsto V^*$ oraz

$$T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$V = \{a, b\}$$

$$\begin{aligned}h(0) &= a \\h(1) &= aa \\h(2) &= b \\h(3) &= bb \\h(4) &= ab\end{aligned}$$

Wyznaczyć: $h^{-1}(h(\{0^n 2^n \mid 0 \leq n \leq 3\}))$

4.17. Niech h będzie homomorfizmem $h: T \mapsto V^*$ oraz

$$T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$V = \{a, b\}$$

$$h(0) = a$$

$$h(1) = ab$$

$$h(2) = aab$$

$$h(3) = baa$$

$$h(4) = ba$$

Wyznaczyć: $h^{-1}(h(\{2232\}))$

4.18. Niech h będzie homomorfizmem $h: T \mapsto V^*$ oraz

$$T = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$V = \{a, b\}$$

$$h(0) = a$$

$$h(1) = aab$$

$$h(2) = abb$$

$$h(3) = b$$

Wyznaczyć: $h^{-1}(h(\{0133\}^*))$

Dana jest gramatyka bezkontekstowa:

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow Aa \mid bB$$

$$B \rightarrow a \mid Sb$$

Poniżej podano łańcuchy symboli tej gramatyki. Odpowiedzieć na pytanie, czy łańcuchy te są formami zdaniowymi tej gramatyki? Jeśli tak, czy są to formy zdaniowe wyprowadzalne lewostronnie i czy są to formy zdaniowe wyprowadzalne prawostronnie? Podać wszystkie frazy, frazy proste i osnowę łańcuchów, jeśli są one formami zdaniowymi powyższej gramatyki.

4.19. **baaABb**

4.20. **AbSbab**

4.21. **bbBBba**

4.22. **bABbaB**

4.23. **bAabaa**

4.24. **AAAabb**

4.25. Aaaaaaa

4.26. AaaAab

4.27. bABbABb

4.28. bSbASbb

4.29.

Niech L będzie językiem. Wykazać prawdziwość lub fałsz stwierdzenia:

$$L^+ = L^* - \{\epsilon\}$$

4.30.

Niech L będzie językiem.

- (a) Czy L^* może być pusty?
- (b) Czy L^+ może być pusty?
- (c) W jakich przypadkach L^* i L^+ są skończone?

4.31.

Dana jest niejednoznaczna gramatyka bezkontekstowa:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow BB \mid \epsilon \\ B &\rightarrow AA \mid a \end{aligned}$$

Poniżej podano łańcuch symboli tej gramatyki.

Ba

Odpowiedzieć, czy łańcuch ten jest formą zdaniową tej gramatyki? Jeśli tak, czy jest to forma zdaniowa wyprowadzalna lewostronnie i czy jest to forma zdaniowa wyprowadzalna prawostronnie? Podać wszystkie frazy i frazy proste łańcucha będącego formą zdaniową powyższej gramatyki. Uwzględnić, że gramatyka nie jest jednoznaczna.

Niech L będzie językiem. Definiuje się operacje MIN i MAX w następujący sposób:

$$MIN(L) = \{ x \in L \mid \text{żadne } w \text{ należące do } L \text{ nie jest właściwym przedrostkiem } x \}$$

$$MAX(L) = \{ x \in L \mid x \text{ nie jest właściwym przedrostkiem żadnego słowa z } L \}$$

Wyznaczyć $MIN(L)$ oraz $MAX(L)$ dla następujących języków:

4.32. $L = \{ 0^n 1^m 2^k \mid n \geq 1, m \geq 1, k \geq 1, n+m \geq k \}$

4.33. $L = \{ 0^n 1^m 0^m 1^n \mid n \geq 0, m \geq 0, (n \neq 0 \text{ lub } m \neq 0) \}$

4.34. $L = \{ 0^n 1^m 2^k \mid n \geq 1, m \geq 1, k \geq 1, (k \leq n \text{ lub } k \leq m) \}$

4.35. $L = \{ 0^n 1^m 2^k \mid n \geq 1, m \geq 1, k \geq 1, (k \geq n \text{ lub } k \geq m) \}$

Rozwiąż następujące zadania związane z przekształceniami języków

4.36. Niech f będzie podstawieniem $f: T \mapsto 2^{V^*}$ oraz
 $T = \{0, 1, 2\}$

$$V = \{a, b\}$$

$$f(0) = \{ (ab)^n \mid n \geq 0 \}$$

$$f(1) = \{ (ba)^n \mid n \geq 0 \}$$

$$f(2) = \{ (ab)^n (ba)^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$$

Niech będą dane języki:

$$L_1 = \{ 021 \}$$

$$L_2 = \{ 0^n 21^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$$

$$L_3 = \{ 2^n \mid n \geq 0 \}$$

$$L_4 = \{ 0^n \mid n \geq 0 \}$$

Wyznaczyć: $f(L_1), f(L_2), f(L_3), f(L_4)$

4.37. Niech f będzie podstawieniem $f: T \mapsto 2^{V^*}$ oraz

$$T = \{0, 1, 2\}$$

$$V = \{a, b\}$$

$$f(0) = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$f(1) = \{ b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$f(2) = \{ a^n \mid n \geq 0 \}$$

Niech będą dane języki:

$$L_1 = \{ 102 \}$$

$$L_2 = \{ 1^n 02^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$$

$$L_3 = \{ (21)^n \mid n \geq 0 \}$$

$$L_4 = \{ 0^n \mid n \geq 0 \}$$

Wyznaczyć: $f(L_1), f(L_2), f(L_3), f(L_4)$

4.38. Niech będą dane języki

$$L_1 = \{ a^n b^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$$

$$L_2 = \{ a^m a^n b^n \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$$

$$L_3 = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$L_4 = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$$

Wyznaczyć: L_1/L_3 i L_2/L_4

4.39. Niech będą dane języki

$$L_1 = \{ a^n b^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$$

$$L_2 = \{ a^m a^n b^n \mid n \geq 0, m \geq 0 \}$$

$$L_3 = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$L_4 = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$$

Wyznaczyć: L_1/L_4 i L_2/L_3

4.40. Niech będą dane języki

$$L_1 = \{a, b\}^*$$

$$L_2 = \{ x \in \{a, b\}^* \mid \text{liczba liter } a \text{ w słowie } x \text{ jest równa liczbie liter } b \text{ w słowie } x \}$$

$$L_3 = \{ b^n \mid n \geq 0 \}$$

$$L_4 = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$$

Wyznaczyć: L_1/L_3 i L_2/L_4

4.41. Niech będą dane języki

$$L_1 = \{a, b\}^*$$

$$L_2 = \{ x \in \{a, b\}^* \mid \text{liczba liter } a \text{ w słowie } x \text{ jest równa liczbie liter } b \text{ w słowie } x \}$$

$$L_3 = \{ b^n \mid n \geq 0 \}$$

$L_4 = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$
Wyznaczyć: L_1/L_4 i L_2/L_3